Министерство образования и науке Российской Федерации

Санкт-Петербургский Государственный технологический институт
(технический университет)

Кафедра общей физики

Осташев В.Б.

ПЕРВИЧНЫЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Теория погрешности, графическое представление данных, аппроксимация зависимостей, оформление отчёта

Санкт-Петербург

2021

УДК ___
Осташев В.Б. «Первичные методы обработки результатов эксперимента»: Учебное пособие. СПбГТИ(ТУ). СПб, 2021,– …с.

В учебном пособии рассмотрены …,
…
…
…
…
…
…
…
Лекции соответствуют следующим компетенциям подготовки специалистов всех направлений: ОК-1, ОК-3, ОК-6, ПК-3, ПК-4, ПК-10.

Рис. __, табл. _, библиогр. 4 назв.

Рецензент:
…

Утверждено на заседании методического Совета _____________ ____ факультета СПГТИ(ТУ). Протокол № __, «__».________.20__г.

Содержание

Введение

Данное учебное пособие состоит из 4-х частей.

Часть I вводит и объясняет основные понятия теории погрешности (используя наиболее простой, примитивный подход) и напрямую касается выполнения так называемой *нулевой лабораторной работы*. В конце этой части приведены примеры выполнения контрольных заданий этой лабораторной работы. К тому же *знания и умения*, которые вы должны получить, изучая данный материал и выполняя данную работу, напрямую *необходимы для последующего выполнения всех лабораторных работ*. Во всех последующих работах один раздел отчёта должен отводится под расчёт погрешностей. И рассчитываться каждый раз (выводится формулы для расчёта погрешностей, подставляться значения, вестись расчёт, округляться результаты…) должны вестись именно так, как разбирается в этой части пособия. Именно так, как указано здесь, *должны округляться все значения во всех выводах всех лабораторных работ*.

Часть II не потребуется Вам для выполнения первой (нулевой) лабораторной работы. Однако она, скорее всего, будет необходима для того, чтобы без проблем сдать все последующие работы. Здесь разбирается два основных и важных момента – как правильно изображать графики в работе и как правильно оформлять отчёт (включая очень болезненный вопрос – *лист наблюдений*).

Часть III посвящена дополнительным вопросам, выходящим за рамки основного курса и ориентирована на любопытных, любознательных студентов, которые хотят продвинутся чуть дальше и выполнить ряд работ на чуть более современном, продвинутом уровне. Изучение этой части может также быть *задано преподавателем, как дополнительное задание к лабораторной работе*. Здесь, во-первых, разбирается более точный метод расчёта ошибок в соответствии с *ГОСТ, математической статистикой* и *теорией ошибок*. Во-вторых, здесь разбирается метод, позволяющий математически точно решить задачу, когда какую-либо физическую величину *требуется найти графически*.

Обозначения

Пока что мы введём одно обозначение. Среднее (*среднее арифметическое*) значение величины $\boldsymbol{X}$ мы будем обозначать, как:

$$\boldsymbol{X}_{cp.} = \langle \boldsymbol{X} \rangle = \frac{1}{\boldsymbol{n}} \sum_{i=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{X}_i = \frac{\sum_{i=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{X}_i}{\boldsymbol{n}}.$$

Иногда среднеарифметическое значение величины обозначают не как $\langle \boldsymbol{X} \rangle$, а как $\bar{\boldsymbol{X}}$. Именно так оно обозначается в ряде источников, на которые мы ссылаемся. Но мы не будем пользоваться этим обозначением средней величины.

Ещё ряд обозначений будет введён в ***Части III*** по ходу изложения. Но не будем забегать вперёд!

Часть I

1 Элементарные методы вычисления погрешности. Представление результатов

1.1 Основные определения

Значение физической величины, полученной в результате эксперимента, всегда содержит ошибку. Произвести абсолютно точные измерения невозможно даже с чисто математической точки зрения. Так, если мы измерили два катета прямоугольного треугольника, и они оказались длиной ровно по одному метру, то при измерении гипотенузы наш прибор должен показать величину – корень из двух $\left(\sqrt{2}\right)$. Кроме того, точность ограничивается предельными возможностями методики эксперимента (на точность измерения длины лазерным дальномером накладывает ограничение длина волны излучения), наличием случайных ошибок и т.д.

Для того чтобы точно оценить измеряемую величину, будим характеризовать её не только наиболее вероятным значением, но и интервалом, в который с наибольшей вероятностью она должна попасть.

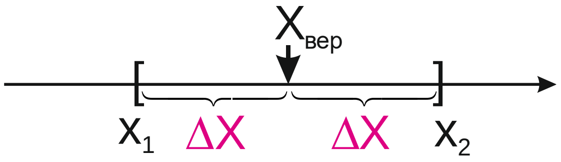


Рисунок 1.1
Абсолютная погрешность физической величины

$$X_1 \le X \le X_2$$

Пусть

$$\left|X_1 - X_{вер.}\right| = \Delta X \text{ ,}$$

$$\left|X_2 - X_{вер.}\right| = \Delta X$$

Тогда

$$X_{вер.} - \Delta X \le X \le X_{вер.} + \Delta X$$

Обычно результат записывают в следующем виде:

$$X = X_{вер.} \pm \Delta X \text{ .} \qquad (1.1)$$

Ошибки.

Определение 1. **Грубые ошибка (промах)** – ошибка, возникшая в результате неточности эксперимента. Представьте, что вы производили замер времени в лабораторной работе. И вдруг Ваш приятель, появившийся откуда ни возьмись, дёргает Вас за руку, задаёт массу ненужных вопросов… Понятно, что данный результат измерения времени надо просто исключить. Или Вы проводите эксперимент не приборе, и вдруг по капилляру, где течёт жидкость, начинает двигаться пузырёк воздуха. Понятно, что Ваши измерения в этот момент времени стоит исключить из рассмотрения. В любом случае, *грубые ошибки* – это те результаты измерений. Которые резко не укладываются в общую схему эксперимента и должны быть исключены из рассмотрения. Математические методы их определения мы оставим в стороне (таковые имеются).

Определение 2. **Систематическая ошибка** – это ошибка, вызванная самим прибором, самим методом измерений. Если шкала прибора сбита на 5 делений, Вы либо знаете это и учтёте в расчётах, либо ника не сможете оценить в ходе измерений. Если у Вас отстают или спешат часы, Вы либо знаете это, либо будите жить по своему времени. Не догадываясь, что ошибаетесь в результатах измерений. В любом случае, систематическую ошибку надо знать заранее. Её невозможно оценить в ходе эксперимента. Правда, в ряде случаев мы всё же можем учесть *систематическую ошибку*. Так погрешность, определяемая классом точности электроизмерительного прибора, является систематической. Но об этом мы поговорим отдельно.

Определение 3. **Случайная ошибка** – это ошибка, *математическое ожидание которой стремиться к **нулю***. Говоря более простым языком, это та ошибка, которая стремиться к нулю (исчезает) при бесконечно большом количестве экспериментов. Она вызвана случайными факторами и именно благодаря ей, измеряя длину катета прямоугольного треугольника, длина которого должна равняться $\sqrt{2}$, мы будем получать то большие, то меньшие значения с равной вероятностью. В основном о ней и пойдет речь в данной работе.

Погрешности.

Определение 4. **Абсолютной погрешностью** называется абсолютное значение разности между истинным и измеренным значением физической величины. (Абсолютная погрешность – это расстояние на числовой прямой, и поэтому – всегда положительная величина).

Определение 5. **Относительная погрешность** – это отношение абсолютной погрешности к значению самой физической величины (вообще-то, к абсолютному значению). Она часто выражается в процентах (%).

Поскольку мы никогда не знаем значения физической величины, значение абсолютной и относительной погрешностей нам также неизвестны. Далее под самой физической величиной будем понимать её наиболее вероятное значение, а под абсолютной и относительной погрешностями – их наиболее вероятные оценки.

Виды физических измерений.

Определение 6. **Прямыми физическими измерениями** называются измерения, когда значение физической величины получается напрямую сравнением с эталоном, считыванием со шкалы или индикатора прибора.

Определение 7. **Косвенными физическими измерениями** называются измерения, когда значение физической величины получается расчётом по формуле из результатов других прямых или косвенных физических измерений.

Вы решили измерить скорость, с которой бегает Ваш друг или подруга, но зайдя в магазин не нашли подходящего спидометра. Вы вышли вместе на алею парка, отмерили стометровку и заставили её или его бегать эти сто метров, замеряя время. Длина пробега $\boldsymbol{l}$ и время движения $\boldsymbol{t}$ являются прямыми измерениями, а скорость, рассчитанная по формуле $\mathrm{v} = l/t$ – косвенным измерением.

1.2 Правила вычисления погрешностей

1.2.1 Расчёт наиболее вероятного значения физической величины

Однократные прямые физические измерения. За значение физической величины принимается значение, считанное с измерительного прибора.

Не имеет смысла дважды прикладывать линейку к образцу при измерении его длины. Полученное в первый раз число и является наиболее вероятным значением для этого метода измерений.

Серия прямых физических измерений. В случае наличия серии прямых физических измерений за наиболее вероятное значение принимается среде арифметическое значение.

$$X_{вер.} = \langle X \rangle = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \qquad (1.2)$$

Косвенные физические измерения. За наиболее вероятное значение результата косвенных физических измерений принимается результат ***однократного*** расчёта по формуле, в которую подставляются ***наиболее вероятные значения*** исходных физических величин.

Подстановка в формулу по очереди всех наборов исходных величин (A_1, B_1, C_1, затем A_2, B_2, C_2,…) не только не нужна, а является ***грубейшей ошибкой***! Во-первых, никто не сказал, что A_1 имеет какое-либо отношение к B_1 и C_1. Допустим, речь может идти о 2-х серия измерений температуры T и давления P, которые проводились на одном технологическом процессе, но в разное время. С другой стороны, пусть результаты измерений есть ***{1,2,3}***, а функция – $\boldsymbol{x^2}$. Среднее (вероятное) значение нашей величины:

$$\frac{1+2+3}{3} = 2.$$

Результат косвенных измерений, если подставить наиболее вероятное значение:

$$2^2 = 4.$$

Однако, если посчитать по отдельности:

$$1^2 = 1,$$

$$2^2 = 4,$$

$$3^2 = 9.$$

И в результате:

$$\frac{1+4+9}{3} = \frac{14}{3} = 4.6(6).$$

Тем не менее, более точным значением является 4. Во втором случае мы квадратично увеличиваем неучтённую ошибку!

1.2.2 Расчёт абсолютной погрешности прямых физических измерений

Однократные физические измерения на приборе со шкалой. За абсолютную погрешность результата физических измерений принимается половина цены наименьшего деления шкалы. Так погрешность линейки составляет 0.5 миллиметра Данное утверждение не относится к электроизмерительным приборам – их погрешность определяется классом точности. И, вообще-то, и то и другое (погрешность линейки и электроизмерительного прибора) – это результат систематической ошибки. Но пока что мы не будем акцентировать внимание на принадлежность ошибок к классу случайных или систематических.

Серия измерений. Алгоритм вычисления абсолютной погрешности:

1. Вычисляем наиболее вероятное (*среднее арифметическое*, см. (1.2)) значение физической величины.
$$X_{ср.} = \langle X \rangle = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_N}{N}$$
2. Принимаем наиболее вероятное значение за само значение физической величины.
$$X \equiv X_{ср.} \tag{1.3}$$
3. Вычисляем частные погрешности – погрешности в каждом из экспериментов серии.
$$\Delta X_i = \left| X_i - X_{ср.} \right| \tag{1.4}$$
4. Теперь погрешности – есть сами результат нового эксперимента по определению погрешностей. Наиболее вероятным значением будет, опять-таки, среднее арифметическое. Вычисляем наиболее вероятное значение абсолютной погрешности, как среднее арифметическое значение частных погрешностей.
$$\Delta X_{ср.} = \langle \Delta X \rangle = \frac{\Delta X_1 + \Delta X_2 + ... + \Delta X_N}{N} \tag{1.5}$$
5. Принимаем наиболее вероятное значение абсолютной погрешности за само значение погрешности.
$$\Delta X \equiv \Delta X_{ср.}. \tag{1.6}$$

1.2.3 Расчёт абсолютной погрешности косвенных измерений

Пусть результат косвенных измерений ***y*** рассчитывается из результата прямых физических измерений ***x***, который известен с погрешностью ***Δx***, по формуле ***y=f(x)***. Надо определить погрешность ***Δy***.

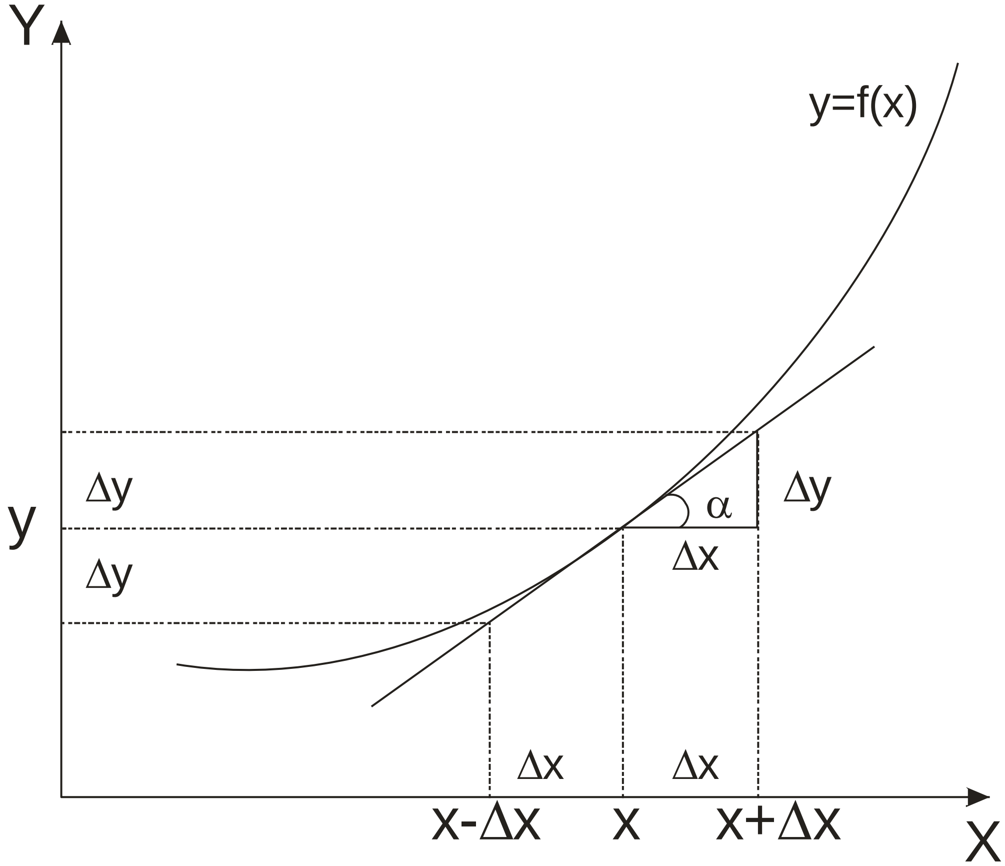


Рисунок 1.2

Связь погрешности косвенных измерений и производной функции

Заметим, что ***Δx*** и ***Δy*** малы по сравнению с ***x*** и ***y***. Для вычисления ***Δy***, заменим функцию ***y=f(x)*** на касательную вблизи точки ***x***. Тогда для ***Δy*** получаем:

$$\Delta y = \Delta x \cdot tg(\alpha)$$

$$tg(\alpha) = f'(x)$$

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x \qquad (1.7)$$

Оказывается, чтобы вычислить абсолютную погрешность ***Δy***, надо абсолютную погрешность ***Δx*** умножить на производную функции в данной точке.

Пусть мы измерили диаметр окружности и хотим вычислить её площадь. Пусть ***D*** – диаметр окружности, а ***ΔD*** – абсолютная погрешность его измерения.

Тогда площадь окружности ***S*** равна:

$$S = \frac{\pi D^2}{4}$$

Производная от расчётной формулы (считая за переменную ***x*** диаметр окружности ***D***):

$$S' = \frac{\pi \cdot 2D}{4} = \frac{\pi D}{2}$$

Формула для расчёта погрешности измерения площади окружности:

$$\Delta S = \frac{\pi D}{2} \cdot \Delta D.$$

Пусть:

D=5 см=$5 \cdot 10^{-2}$м,

ΔD=0.5 мм=$5 \cdot 10^{-4}$м,

тогда:

$$\Delta S = \frac{\pi D}{2} \cdot \Delta D = \frac{3.1415926 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 39.2699075 \cdot 10^{-6} \approx 4 \cdot 10^{-5}.$$

(последнее, учитывая правила округления погрешностей, которые будут приведены ниже)

В случае если речь идёт о функции нескольких переменных, вместо простых производных, надо говорить о частных производных.

Частной производной функции нескольких переменных называется производная, когда лишь одна из переменных считается изменяющейся величиной, а все остальные переменные считаются константами. Обозначается $\frac{\partial y}{\partial x}$ - производная ***y*** по ***x***.

Пусть дана функция:

$$y = \frac{ab^3}{c^2} - \sin(c)$$

Частная производная по ***a***:

$$\frac{\partial y}{\partial a} \Rightarrow a \to x, b \to C_1, c \to C_2 \Rightarrow y = \frac{xC_1^3}{C_2^2} - \sin(C_2) \Rightarrow y' = \frac{1 \cdot C_1^3}{C_2^2} - 0$$

В результате имеем (возвращая на место исходные обозначения):

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{b^3}{c^2}$$

Частная производная по ***b***:

$$\frac{\partial y}{\partial b} \Rightarrow b \to x, a \to C_1, c \to C_2 \Rightarrow y = \frac{C_1 x^3}{C_2^2} - \sin(C_2) \Rightarrow y' = \frac{C_1 \cdot 3x^2}{C_2^2} - 0$$

В результате имеем:

$$\frac{\partial y}{\partial b} = \frac{3ab^2}{c^2}$$

Частная производная по ***c***:

$$\frac{\partial y}{\partial c} \Rightarrow c \to x, a \to C_1, b \to C_2 \Rightarrow y = \frac{C_1 C_2^3}{x^2} - \sin(x) \Rightarrow y' = -2\frac{C_1 C_2^3}{x^3} - \cos(x)$$

В результате имеем:

$$\frac{\partial y}{\partial c} = -\left(\frac{2ab^3}{c^3} + \cos(c)\right)$$

Алгоритм построения формулы для расчёта абсолютной погрешности косвенных измерений:

1. Вычисляем частные производные заданной функции по всем входящим туда величинам.
2. Записываем формулу полного дифференциала. Полный дифференциал представляет собой сумму всех частных производных, помноженных на дифференциалы соответствующих переменных. Если в самом начале этого раздела при выводе формулы для расчёта абсолютной погрешности косвенных измерений для функции одной переменной, мы говорили о касательной к графику этой функции, то полный дифференциал задает касательную плоскость к поверхности в пространстве многих измерений (в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$).

$$dy = \frac{\partial y}{\partial a} \cdot da + \frac{\partial y}{\partial b} \cdot db + \frac{\partial y}{\partial c} \cdot dc + \ldots \quad (1.8)$$

Для приведённой выше формулы $\left(y = \frac{ab^3}{c^2} - \sin(c) \right)$ полный дифференциал будет иметь вид:

$$dy = \frac{b^3}{c^2} \cdot da + \frac{3ab^2}{c^2} \cdot db - \left(\frac{2ab^3}{c^3} + \cos(c) \right) \cdot dc$$

3. Записываем формулу для расчёта абсолютной погрешности. При этом заменяем значки бесконечно малых приращений ***d*** на значки конечных приращений ***Δ*** и берём все частные производные по модулю. Последнее необходимо, так как мы не знаем реальные знаки абсолютных погрешностей исходных величин. Мы с равной вероятностью могли промахиваться как в большую, так и в меньшую сторону. В худшем случае всё частные погрешности (погрешности, вносимые измерением отдельных величин) сложатся.

$$\Delta y = \underbrace{\left| \frac{\partial y}{\partial a} \right| \cdot \Delta a}_{\Delta y_a} + \underbrace{\left| \frac{\partial y}{\partial b} \right| \cdot \Delta b}_{\Delta y_b} + \underbrace{\left| \frac{\partial y}{\partial c} \right| \cdot \Delta c}_{\Delta y_c} + \ldots . \quad (1.9)$$

Здесь Δy_a, Δy_b, Δy_c – погрешность, вносимая в окончательный результата, измерением величин ***a***, ***b*** и ***c***, то есть *частные погрешности*.

Для нашего примера имеем:

$$\Delta y = \left| \frac{b^3}{c^2} \right| \cdot \Delta a + \left| \frac{3ab^2}{c^2} \right| \cdot \Delta b + \left| \frac{2ab^3}{c^3} + \cos(c) \right| \cdot \Delta c$$

1.2.4 Расчёт относительной погрешности косвенных измерений

В ряде случаев, когда расчётная формула содержит умножение или возведение в степень в качестве старших (последних по очерёдности выполнения) действий, бывает удобно сначала вывести формулу для расчёта относительной погрешности и рассчитать её в цифрах, а уже затем из неё пересчитать значение абсолютной погрешности.

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{y} \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \varepsilon \cdot y$$

Пусть результат косвенных измерений рассчитывается по формуле:

$$y = f(x)$$

Тогда абсолютная погрешность ***Δy*** задаётся выражением:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$$

Вычислим относительную погрешность этих измерений, произведя необходимую подстановку:

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{y} = \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \Delta x$$

Но, стоящее перед ***Δx*** выражение есть производная от натурального логарифма функции ***f(x)***:

$$\left(\ln\left(f(x)\right)\right)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Тогда, делая необходимую замену, имеем:

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \Delta x = \left(\ln\left(f(x)\right)\right)' \cdot \Delta x$$

В результате мы выяснили, что, для того чтобы вывести формулу для расчёта относительной погрешности косвенных измерений, необходимо сначала прологарифмировать исходное выражение, а затем проделать все те действия, что и при выводе формулы для расчёта абсолютной погрешности. В этом случае, вместо формулы для абсолютной погрешности мы получим формулу для расчёта относительной погрешности:

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{y} = \left(\ln\left(f(x)\right)\right)' \cdot \Delta x . \qquad (1.10)$$

Таким образом, для вывода формулы *относительной погрешности в случае косвенных измерений* необходимо сначала *прологарифмировать* выражение, а затем повторить все те действия, которые мы делали в случае вывода формулы *абсолютной погрешности косвенных измерений*.

Пример. Пусть косвенные измерения заданы формулой (***a***, ***b*** и ***c*** – результаты других прямых или косвенных измерений, известных с погрешностью):

$$y=\frac{ab^2}{1+c}\cdot\frac{c^2}{\sin(b)}.$$

Прологарифмируем выражение:

$$\ln(y)=\ln(a)+2\ln(b)-\ln(1+c)+2\ln(c)-\ln(\sin(b)).$$

Найдём все частные производные от полученного логарифма:

$$\frac{\partial\ln(y)}{\partial a}=\frac{1}{a},$$

$$\frac{\partial\ln(y)}{\partial b}=\frac{2}{b}-\frac{1}{\sin(b)}\cdot(\sin(b))'=\frac{2}{b}-\frac{1}{\sin(b)}\cdot\cos(b)=\frac{2}{b}-\frac{\cos(b)}{\sin(b)}=\frac{2}{b}-ctg(b),$$

$$\frac{\partial\ln(y)}{\partial c}=-\frac{1}{1+c}+\frac{2}{c}.$$

Запишем формулу полного дифференциала логарифма исходного выражения:

$$d\ln(y)=\frac{1}{a}da+\left(\frac{2}{b}-ctg(b)\right)db+\left(-\frac{1}{1+c}+\frac{2}{c}\right)dc.$$

Заметим отдельно, что в математике, в принципе, существует прямой метод вычисления полных дифференциалов – не прибегая к расчёту каждой частной производной по отдельности. Но мы не рекомендуем спешить и сначала научится выполнять этот алгоритм поэтапно, как показано в данном примере.

Преобразуем полученное выражение в формулу для расчёта относительной погрешности косвенных измерений:

$$\varepsilon=\frac{\Delta y}{y}=\left|\frac{1}{a}\right|\cdot\Delta a+\left|\frac{2}{b}-ctg(b)\right|\cdot\Delta b+\left|-\frac{1}{1+c}+\frac{2}{c}\right|\cdot\Delta c$$

1.3 Представление конечных результатов

1.3.1 Округление результатов физических измерений

Округление результатов физических измерений начинается с погрешности. Абсолютная погрешность округляется до одной значащей цифры, если эта цифра больше 3, и до двух значащих цифр во всех остальных случаях (то есть, если эта цифра 1, 2 или3).

Определение. **Значащими цифрами** называются все цифры, кроме лидирующих (порядковых, стоящих слава) нулей. Значащие цифры нумеруются *слева направо*.

Если представить число в *нормализованном виде*, то есть так, чтобы до десятичной точки стояла только одна цифра, и всё число при этом умножалось на десять в некоторой степени (эта степень называется порядком числа), то первая значащая цифра – это цифра, стоящая перед десятичной точкой. Вторая значащая цифра – первая, после точки.

$285.6=2.856\cdot10^2$ → 2 –первая, 8 – вторая цифра (надо 2 цифры) ⇒ $285.6\approx290=2.9\cdot10^2$;

$0.00625=6.25\cdot10^{-3}$ → 6 –первая, 2 – вторая цифра (надо 1 цифру)⇒ $0.00625\approx0.006=6\cdot10^{-3}$;

$1.216=1.216\cdot10^0$ → 1 –первая, 2 – вторая цифра (надо 2 цифры)⇒ $1.216\approx1.2$;

$0.976=9.06\cdot10^{-1}$ → 9 –первая, 7 – вторая цифра (надо 1 цифру, но она 0) ⇒ $0.976\approx1.0$.

В последнем примере 0 после запятой важен, так как мы округляли до десятых, а не до единиц! Эти мы подчёркиваем, что в данной позиции стоит 0, а не, скажем, округлённая 2.

Мы будим ***округлять погрешность по правилам математики*** (как требует того ГОСТ), хотя иногда встречаются рекомендации и методические руководства, где погрешность округляется всегда в большую сторону, чтобы в любом случае не уменьшать её и не улучшать искусственно ситуацию.

Само значение физической величины округляется до того же порядка, что и погрешность. Округление производится по правилам математики. Если сложить (или вычесть) значение физической величины и её погрешность столбиком, то над последней округлённой цифрой погрешности должна стоять та цифра, до которой мы будем округлять физическую величину.

Как пример:

Пусть значение физической величины составляет

$$879345.1,$$

а значение погрешности при этом

$$4785.124.$$

Округление результатов измерения начинаем с округления погрешности:

$$4785.124 \quad \Rightarrow \quad 4.785124\cdot10^3 \quad \Rightarrow \quad 4>3,\ 4.785124\cdot10^3 \rightarrow 5\cdot10^3=5000$$

Округляем саму физическую величину до того же порядка, что и погрешность:

$$\pm\begin{array}{r} 8\ 7\ 9\boxed{3\ 4\ 5.1} \leftarrow \textit{округляем} \\ 5\boxed{0\ 0\ 0.0} \leftarrow \textit{округлено} \\ \hline \ldots \end{array}$$

$\Rightarrow$ округление производим до 9-ки (до тысяч). $\Rightarrow$ 879000.
В итоге, получили:

$$879000 \pm 5000 = (8.79 \pm 0.05) \cdot 10^5.$$

Сам по себе порядок, до которого мы округляем погрешность или значение величины не играет никакой роли. Правила округления всегда определяются погрешностью измерений, а не положением десятичной точки. Если округлённое число было длинной, записанной в метрах, и мы перевели его в миллиметры, округление значения самой величины и погрешности измениться не должны!

Замечание. Утверждение, что «мы округляем погрешность до двух значащих цифр», если эти цифры 1, 2 или 3, в зависимости от принятых соглашений, может изменяться. Так, может утверждаться, что эти цифры только 1 или 2 (округляем до 1-ой значащей цифры, если эта цифра больше 2) или только 1 (округляем до 1-ой значащей цифры, если эта цифра больше 2). Это зависит от принятых в данной области науки или техники соглашений или, просто, договорённости. Однако мы примем утверждение в том виде, в каком сформулировали его в самом начале.

Надо отметить, что во времена Советского Союза и Совета Экономической Взаимопомощи (СЭВ) между странами социалистического лагеря существовал Стандарт СЭВ по округлению погрешностей. Этот Стандарт требовал округлять погрешности по правилам математики (а не в большую сторону). Причём оставлять две значащие цифры, если первая значащая цифра округляется до цифры меньше трёх (0, 1, 2) и до двух значащих цифр, если эта цифра округляется до трёх и больше (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Но с ликвидацией СЭВ этот стандарт утратил свою силу. На сегодняшний день этот ГОСТ переиздан, как Государственный Стандарт России (ГОСТ Р 8.736-2011). Мы пытаемся излагать материал максимально близко к данному стандарту.

Относительная погрешность всегда округляется ***до двух значащих цифр***. И последнее. При расчёте необходимо оставлять (переписывать с калькулятора) минимум на 1-н порядок больше, чем будет произведено последующее округление.

1.3.2 Представление результатов в нормализованном виде

После округления результата измерений очень важно правильно представить конечное значение. Здесь надо помнить следующее:

1. Результатом физических измерений, измеренной физической величиной является набор из двух чисел – самой величины и погрешности. Поэтому не стоит дополнительно отображать в записи то, что Вами записана не просто физическая величина, а величина с погрешностью. Пусть в результате выполнения лабораторной работе Вы получили следующие значения для ускорения свободного падения:

   $$g=9.5 \text{ м/с}^2,\ \Delta g=0.5 \text{ м/с}^2.$$

   И пусть в лабораторной работе требуется следующее:

   «Запишите полученное значение ускорения свободного падения в виде $g\pm\Delta g$.»

   В результате (в выводе) вы должны записать следующий результат:

   $$g=9.5\pm0.5 \text{ м/с}^2.$$

   Так записывать результат не стоит:

   $$\cancel{g\pm\Delta g=9.5\pm0.5 \text{ м/с}^2}.$$

   Запись в такой форме будет неграмотная! Не надо дополнительно указывать, что приведена не просто величина, а величина с погрешностью, это и так очевидно. То, что это явно отмечено в задании – просто желание авторов методических указаний напомнить Вам, чтобы Вы не забыли указать и погрешность тоже.

2. Результаты, если это необходимо, *представляются в нормализованном виде*. *Нормализованное* (или *нормальное*) *представление числа* – такая форма записи чисел, когда до десятичного разделителя (десятичной точки или запятой, что Вам ближе 😊) стоит ровно одна значащая цифра. То есть ровно одна цифра, отличная от ***0***. И это число умножается на порядок – ***10*** в той или иной степени (*положительной*, если исходное число больше 1, или *отрицательной*, если меньше ***1***). Так число

   $$2834.51$$

   в нормализованном виде будет выглядеть, как

   $$2.83451\cdot10^3.$$

   А число

   $$0.000283451$$

   в нормализованном виде будет выглядеть, как

   $$2.83451\cdot10^{-4}.$$

3. В нормализованном виде всегда записывается само значение физической величины, а не погрешность. Порядок и единицы измерения выносятся за скобки, внутри скобок располагаются величина и погрешность, которые надо домножить на величину (***10*** в степени), вынесенную за скобки. Так, если длина волны видимого света и погрешность равны

$$\lambda=7.30\cdot10^{-7}\ м,\ \Delta\lambda=1.3\cdot10^{-8}\ м$$

(это $\lambda=730\ нм$ и $\Delta\lambda=0.13\ нм$),

то результата должен быть записан так:

$$\lambda=(7.30\pm0.13)\cdot10^{-7}\ м.$$

Если длина удельный заряд электрона (по абсолютной величине) и его погрешность равны

$$e/m_e=1.76\cdot10^{\ 11}\ м,\ \Delta e/m_e=8\cdot10^{\ 9}\ Кл/кг,$$

то результата должен быть записан так:

$$\Delta e/m_e=(1.76\pm0.08)\cdot10^{11}\ Кл/кг.$$

4. Нормализация физической величины обычно производится в том случае, если она

$$< 0.001$$

или

$$\geq 10000.$$

В противном случае записывать результат в нормализованной форме не имеет смысла.

1.4 Расчёт погрешности электроизмерительных приборов

Класс точности прибора – это систематическая погрешность данного прибора. Для электроизмерительных приборов погрешность определяется ***классом точности прибора***. Класс точности электроизмерительного прибора указывается на его передней панели (рядом со шкалой) среди других элементов маркировки.

Если класс точности прибора ***заключён в кружок***, это есть ***относительная погрешность прибора*** – отношение абсолютной погрешности к измеренному значению величины (в %).

$$\text{к.т.}=\frac{\Delta X}{X}\Rightarrow \Delta X=\frac{\text{к.т.}\cdot X}{100\%}. \qquad (1.11)$$

Если класс точности прибора ***не заключён в кружок***, это есть ***максимальная относительная погрешность прибора*** или *приведённая погрешность* – отношение абсолютной погрешности к максимальному значению шкалы прибора (в %).

$$\text{к.т.}=\frac{\Delta X}{X_{\max}}\Rightarrow \Delta X=\text{к.т.}\cdot X_{\max} \qquad (1.12)$$

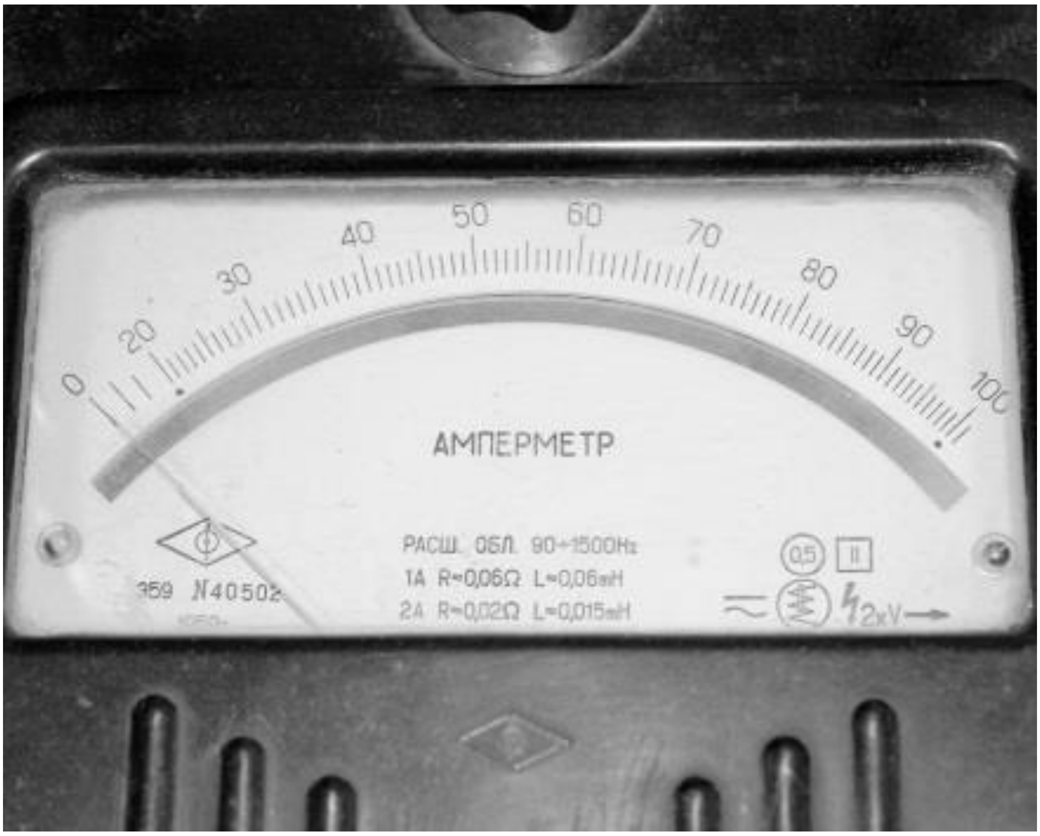


Рисунок 1.3

Прибор, где класс точности указан в кружке

Здесь класс точности *в кружочке,* его величина:

к.т. = 0,5

Тогда, если значение измеренной величины равнялось ***I=40A***, а максимальное значение шкалы ***I_{max}=100A***, подставляем измеренное, а не максимальное значение (***I=40A***):

$$\Delta I = к.т. \cdot I/100\% = 0.5 \cdot 40/100\% = 0.2А.$$

Рисунок 1.4

Прибор, где класс точности указан без кружка

Здесь класс точности *без кружочка*, его величина:

$$к.т. = 1,5$$

Тогда, если значение измеренной величины равнялось ***I=400A***, а максимальное значение шкалы ***I_{max}=800A***, подставляем максимальное, а не измеренное значение (***I_{max}=800A***):

$$\Delta I = к.т. \cdot I_{max}/100\% = 1.5 \cdot 800/100\% = 12А.$$

независимо от измеренного значения.

Ещё раз напомним, что класс точности определяет погрешность в *результате неисключаемой систематической ошибки*. Если в результате измерений у нас появилась как *систематическая*, так и с*лучайная ошибка*, результирующая ошибка (в самом простом случае) будет равна *сумме этих двух ошибок*:

$$\Delta Y = \left|\Delta Y_{Систематическая}\right| + \left|\Delta Y_{Случайная}\right|. \tag{1.13}$$

К примеру, мы производим измерение одного и того же напряжения на вольтметре несколько раз (скажем, выключая и заново включая схему). При этом мы вычисляем среднее значения напряжения и можем вычислить *погрешность напряжения*, как *погрешность в серии измерений* (рассчитаем частные погрешности и их среднее значение). Это *погрешность, учитывающая случайную ошибку*. Также у нас есть класс точности прибора (вольтметра) мы можем вычислить ошибку, исходя из класса точности, как это было показано раньше. Это *погрешность, учитывающая систематическую ошибку*. В самом простом случае эти погрешности надо сложить.

Более точный алгоритм решения задачи мы разберём чуть ниже, в разделе 5. Сейчас же разберём два примера, используя ту логику рассуждений, которую мы приняли выше.

Первый вариант. Пусть класс точности *электроизмерительного прибора* указан *без кружка*. И мы провели ***N*** измерений величины ***X*** на этом приборе. Тогда систематическая ошибка составит:

$$\Delta X_{Систематическая} = \text{к.т.} \cdot \left|X_{\max}\right|.$$

Случайную погрешность мы будим вычислять следующим образом:

1. рассчитываем среднее значение измеряемой величины
$$\langle X \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N},$$
2. рассчитываем частные погрешности
$$\Delta X_i = \left|X_i - \langle X \rangle\right|,$$
3. вычисляем значение случайной погрешности, как среднего значения частных погрешностей
$$\Delta X_{Случайная} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta X_i}{N}.$$

Тогда окончательно погрешность наших измерений составит:

$$\Delta Y = \Delta Y_{Систематическая} + \Delta Y_{Случайная}.$$

Модули здесь не нужны, так как обе погрешности и так не меньше нуля.

Для нашего примера, рассмотренного в этом разделе, получим следующее.

Класс точности *без кружочка* равен:

$$\text{к.т.} = 1{,}5;$$

максимальное значение шкалы

$$\boldsymbol{I_{max}=800A};$$

серия из ***N=5*** измеренных значений ***I***

410, 395, 401, 408, 380 ***A***.

Расчёт.

Систематическая погрешность:

$$\Delta I_{Систематическая} = \frac{к.т.\times I_{max}}{100\%} = \frac{1.5\cdot 800}{100\%} = 12$$

Значение измеренной величины (*среднее*):

$$I = \langle I \rangle = \frac{410+395+401+408+380}{5} = 398.8$$

Частные погрешности каждого из экспериментов:

$$\Delta I_1 = |410-398.8| = 11.2,$$

$$\Delta I_2 = |395-398.8| = 3.8,$$

$$\Delta I_3 = |401-398.8| = 2.2,$$

$$\Delta I_4 = |408-398.8| = 9.2,$$

$$\Delta I_5 = |380-398.8| = 18.8.$$

Случайная погрешность в нашем эксперименте:

$$\Delta I_{Случайная} = \frac{11.2+3.8+2.2+9.2+18.8}{5} = 9.04.$$

Суммарная погрешность измерений:

$$\Delta I = \Delta I_{Систематическая} + \Delta I_{Случайная} = 12.00 + 9.04 = 21.09.$$

Запишем окончательно результат измерений:

$$\Delta I = 399 \pm 21A.$$

Второй вариант. Пусть класс точности *электроизмерительного прибора* указан *в кружке*. И мы провели $\boldsymbol{N}$ измерений величины $\boldsymbol{X}$ на этом приборе. Вычислим систематическую ошибку:

1. систематическая ошибка в каждом эксперименте составит:

$$\Delta X_{Систематическая\ i} = \frac{\text{к.т.} \cdot X_i}{100\%},$$

2. рассчитаем систематическую ошибку измерения. как среднюю из систематических ошибок каждого измерения:

$$\Delta X_{Систематическая} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta X_{Систематическая\ i}}{N}.$$

Случайную погрешность мы будим вычислять следующим образом:

1. рассчитываем среднее значение измеряемой величины

$$\langle X \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N},$$

2. рассчитываем частные погрешности

$$\Delta X_i = \left| X_i - \langle X \rangle \right|,$$

3. вычисляем значение случайной погрешности, как среднего значения частных погрешностей

$$\Delta X_{Случайная} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta X_i}{N}.$$

Тогда окончательно погрешность наших измерений составит:

$$\Delta Y = \Delta Y_{Систематическая} + \Delta Y_{Случайная}.$$

Модули здесь не нужны, так как обе погрешности и так не меньше нуля.

Для нашего примера, рассмотренного в этом разделе, получим следующее.

Класс точности *в кружочке* равен:

$$\text{к.т.} = 0{,}5;$$

максимальное значение шкалы

$$\boldsymbol{I_{max}=800A};$$

серия из $\boldsymbol{N=5}$ измеренных значений $\boldsymbol{I}$

410, 395, 401, 408, 380 ***A***.

Расчёт.

Систематическая погрешность в каждом эксперименте:

$$\Delta I_{Систематическая\,1} = \frac{к.т.\times I_1}{100\%} = \frac{1.5\cdot 410}{100\%} = 6.150,$$

$$\Delta I_{Систематическая\,2} = \frac{к.т.\times I_2}{100\%} = \frac{1.5\cdot 395}{100\%} = 5.925,$$

$$\Delta I_{Систематическая\,3} = \frac{к.т.\times I_3}{100\%} = \frac{1.5\cdot 401}{100\%} = 6.015,$$

$$\Delta I_{Систематическая\,4} = \frac{к.т.\times I_4}{100\%} = \frac{1.5\cdot 408}{100\%} = 6.120,$$

$$\Delta I_{Систематическая\,5} = \frac{к.т.\times I_5}{100\%} = \frac{1.5\cdot 380}{100\%} = 5.700.$$

Результирующая систематическая погрешность:

$$\Delta I_{Систематическая} = \frac{6.150+5.925+6.015+6.120+5.700}{5} = 5.982.$$

Значение измеренной величины (*среднее*):

$$I = \langle I \rangle = \frac{410+395+401+408+380}{5} = 398.8.$$

Частные погрешности каждого из экспериментов:

$$\Delta I_1 = |410-398.8| = 11.2,$$

$$\Delta I_2 = |395-398.8| = 3.8,$$

$$\Delta I_3 = |401-398.8| = 2.2,$$

$$\Delta I_4 = |408-398.8| = 9.2,$$

$$\Delta I_5 = |380-398.8| = 18.8.$$

Случайная погрешность в нашем эксперименте:

$$\Delta I_{Случайная} = \frac{11.2+3.8+2.2+9.2+18.8}{5} = 9.04.$$

Суммарная погрешность измерений:

$$\Delta I = \Delta I_{Систематическая} + \Delta I_{Случайная} = 5.982+9.04 = 15.022.$$

Запишем окончательно результат измерений:

$$\Delta I = 399 \pm 15 A$$

2 Пример выполнения контрольных заданий

2.1 Задание 1 – округление результатов

Произвести округление результатов физических измерений и их абсолютных погрешностей.

Таблица 2.1

Исходные данные для округления физических величин

Физическая величина	Абсолютная погрешность	Результат округления
879345.1	4785.124	
2342.1	181.255	
92.348	2.37168	
1.21456	0.0456124	
0.92967	0.0168123	
952.127	25.6543	
12454.24	674.124	
0.013405601	0.00045489	

Решение

Округление результатов измерения начинаем с округления погрешности:

$4785.124 \Rightarrow 4.785124\cdot10^3 \Rightarrow 4>3,\ 4.785124\cdot10^3 \rightarrow 5\cdot10^3 \Rightarrow 5000$

Округляем саму физическую величину до того же порядка, что и погрешность:

$\pm\dfrac{\begin{array}{r}879345.1\\ 5000.0\end{array}}{\ldots} \Rightarrow$ Округление производим до 9-ки (до тысяч). $\Rightarrow$ 879000

$181.255 \Rightarrow 1.81255\cdot10^2 \Rightarrow 1\le3,\ 1.81255\cdot10^2 \rightarrow 1.8\cdot10^3 \Rightarrow 180,$

$2.37168 \Rightarrow 2.37168\cdot10^0 \Rightarrow 2\le3,\ 2.37168\cdot10^0 \rightarrow 2.4\cdot10^0 \Rightarrow 2.4,$

$0.0465124 \Rightarrow 4.65124\cdot10^{-2} \Rightarrow 4>3,\ 4.65124\cdot10^{-2} \rightarrow 5\cdot10^{-2} \Rightarrow 0.05,$

$0.0168123 \Rightarrow 1.68123\cdot10^{-2} \Rightarrow 1\le3,\ 1.68123\cdot10^{-2} \rightarrow 1.7\cdot10^{-2} \Rightarrow 0.017,$

$24.6543 \Rightarrow 2.46543\cdot10^1 \Rightarrow 2\le3,\ 2.46543\cdot10^1 \rightarrow 2.5\cdot10^1 \Rightarrow 25,$

$674.124 \Rightarrow 6.74124\cdot10^2 \Rightarrow 6>3,\ 6.74124\cdot10^2 \rightarrow 7\cdot10^2 \Rightarrow 700,$

$0.00045489 \Rightarrow 4.5489\cdot10^{-4} \Rightarrow 4>3,\ 4.5489\cdot10^{-4} \rightarrow 5\cdot10^{-4} \Rightarrow 0.0005.$

Таблица 2.2

Результат округления физических величин

Физическая величина	Абсолютная погрешность	Результат округления	
		Не нормализованный вид	Нормализованный вид
879345.1	4785.124	889000±5000	$(8.89\pm0.05)\cdot10^{5}$
2342.1	181.255	2340±180	$(2.34\pm0.18)\cdot10^{3}$
92.348	2.37168	92.3±2.4	$(9.23\pm0.24)\cdot10^{1}$
1.21456	0.0465124	1.21±0.05	(1.21 ± 0.05)
0.92967	0.0168123	0.930±0.017	$(9.30\pm0.17)\cdot10^{-1}$
952.127	24.6543	952±25	$(9.52\pm0.25)\cdot10^{2}$
12434.24	674.124	12400±700	$(1.24\pm0.07)\cdot10^{4}$
0.013405601	0.00045489	0.0134±0.0005	$(1.34\pm0.05)\cdot10^{-2}$

2.2 Задание 2 – расчёт абсолютной погрешности

В заданиях ***2*** и ***3*** мы приведём два варианта заданий и их решений. Первый вариант содержит усложнённые математические формулы, не имеющие конкретного физического смысла. И этот вариант не требует вычислений по полученным формулам (это старый вариант заданий). Второй вариант содержит реальную физическую задачу и помимо вывода формулы требует произвести подстановку значений, вычисление и округление полученных результатов (новый вариант заданий).

2.2.1 Усложнённый вариант задания

Вывести формулу для расчёта абсолютной погрешности косвенных измерений, считая, что величины a, b, c, … являются результатами других прямых или косвенных измерений.

Формула, для расчёта результата косвенных измерений:

$$Y = \frac{2ab^3}{1+\sin\left(c^2\right)} + \frac{\cos\left(c\right)}{a^2}.$$

Решение

1. Вычислим частные производные по всем входящим в расчётную формулу величинам, являющимися результатами прямых или косвенных измерений:

$$\frac{\partial Y}{\partial a} = \frac{2b^3\cdot 1}{1+\sin\left(c^2\right)} + \frac{-2\cdot\cos\left(c\right)}{a^3}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial b} = \frac{2a\cdot 3b^2}{1+\sin\left(c^2\right)} + 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial c} = \frac{-1\cdot 2ab^3}{\left(1+\sin\left(c^2\right)\right)^2}\cdot\cos\left(c^2\right)\cdot 2c + \frac{-\sin\left(c\right)}{a^2}$$

2. Запишем формулу полного дифференциала:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial a}\cdot da + \frac{\partial Y}{\partial b}\cdot db + \frac{\partial Y}{\partial c}\cdot dc =$$

$$= \left(\frac{2b^3}{1+\sin\left(c^2\right)} - \frac{2\cos\left(c\right)}{a^3}\right)\cdot da + \left(\frac{6ab^2}{1+\sin\left(c^2\right)}\right)\cdot db +$$

$$+\left(-\frac{4ab^3c\cos\left(c^2\right)}{\left(1+\sin\left(c^2\right)\right)^2} - \frac{\sin\left(c\right)}{a^2}\right)\cdot dc$$

3. Преобразуем формулу полного дифференциала в формулу для расчёта абсолютной погрешности:

$$\Delta Y = \left|\frac{\partial Y}{\partial a}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial Y}{\partial b}\right|\Delta b + \left|\frac{\partial Y}{\partial c}\right|\Delta c =$$

$$= \left|\frac{2b^3}{1+\sin\left(c^2\right)} - \frac{2\cos\left(c\right)}{a^3}\right|\Delta a + \left|\frac{6ab^2}{1+\sin\left(c^2\right)}\right|\Delta b +$$

$$+\left|\frac{4ab^3c\cos\left(c^2\right)}{\left(1+\sin\left(c^2\right)\right)^2}+\frac{\sin\left(c\right)}{a^2}\right|\Delta c$$

Необходимая формула получена

2.2.2 Физически осмысленное задание

Магнитной индукции горизонтальной составляющей магнитного поля Земли может быть экспериментально определена на тангенс-гальванометре и рассчитана по формуле:

$$B_{Земли}=\frac{\mu_0\, I\, n}{2R\,\mathrm{tg}\,\alpha},$$

где

μ_0 *–магнитная постоянная,*

I *–сила тока,*

n *–число витков катушки тангенс-гальванометра,*

R *–радиус катушки тангенс-гальванометра,*

α *–угол отклонения стрелки тангенс-гальванометра.*

Вывести форму для абсолютной погрешности, рассчитать значение физической величины (магнитной индукции горизонтальной составляющей магнитного поля Земли), её абсолютную и относительную погрешности и представить результаты в соответствии с правилами округления.

Значение физических величин в результате измерения и их погрешности:

$\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м, I=2.40±0.15 мА, n= 1000±25, R= 10.00±0.05 см, α=(45±0.5)°.

Решение

1. Переведём значения величин с систему СИ:
   $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м,
   I=(2.40±0.15)$\cdot10^{-3}$ А,
   n= 1000±25,
   R= (1.000±0.005)$\cdot10^{-1}$ м,
   α=(0.8648±0.0087) радиан.
2. Подставим значения в формулу и произведём вычисление:

$$B_{Земли}=\frac{\mu_0\, I\, n}{2R\,\mathrm{tg}\,\alpha}=\frac{4\cdot3.1415\cdot10^{-7}\cdot2.4\cdot10^{-3}\cdot10^{3}}{2\cdot0.1\cdot\mathrm{tg}45^\circ}=150.792\cdot10^{-7}=$$

$$=1.50792\cdot10^{-5}\,Тл.$$

3. Вычислим частные производные по всем величинам, имеющим погрешность:

$$\frac{\partial B_{Земли}}{\partial I}=\frac{\mu_0\, n}{2R\,\mathrm{tg}\,\alpha},$$

$$\frac{\partial B_{Земли}}{\partial n}=\frac{\mu_0\, I}{2R\,\mathrm{tg}\,\alpha},$$

$$\frac{\partial B_{Земли}}{\partial R}=-\frac{\mu_0\, I\, n}{2R^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}=-\frac{\mu_0\, I\, n}{2R^2\,\mathrm{tg}\,\alpha},$$

$$\frac{\partial B_{Земли}}{\partial \alpha} = -\frac{\mu_0 I n}{2R \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} =$$

$$= -\frac{\mu_0 I n \cancel{\cos^2 \alpha}}{2R \sin^2 \alpha \cancel{\cos^2 \alpha}} = -\frac{\mu_0 I n}{2R \sin^2 \alpha}.$$

4. Запишем формулу полного дифференциала:

$$dB_{Земли} = \frac{\partial B_{Земли}}{\partial I} dI + \frac{\partial B_{Земли}}{\partial n} dn + \frac{\partial B_{Земли}}{\partial R} dR + \frac{\partial B_{Земли}}{\partial \alpha} d\alpha =$$

$$= \frac{\mu_0 n}{2R \operatorname{tg} \alpha} dI + \frac{\mu_0 I}{2R \operatorname{tg} \alpha} dn - \frac{\mu_0 I n}{2R^2 \operatorname{tg} \alpha} dR - \frac{\mu_0 I n}{2R \sin^2 \alpha} d\alpha.$$

5. Преобразуем формулу полного дифференциала в формулу для вычисления абсолютной погрешности:

$$\Delta B_{Земли} = \left|\frac{\partial B_{Земли}}{\partial I}\right| \Delta I + \left|\frac{\partial B_{Земли}}{\partial n}\right| \Delta n + \left|\frac{\partial B_{Земли}}{\partial R}\right| \Delta R + \left|\frac{\partial B_{Земли}}{\partial \alpha}\right| \Delta \alpha =$$

$$= \left|\frac{\mu_0 n}{2R \operatorname{tg} \alpha}\right| \Delta I + \left|\frac{\mu_0 I}{2R \operatorname{tg} \alpha}\right| \Delta n + \left|\frac{\mu_0 I n}{2R^2 \operatorname{tg} \alpha}\right| \Delta R - \left|\frac{\mu_0 I n}{2R \sin^2 \alpha}\right| \Delta \alpha =$$

$$= \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\left(\frac{|n|\Delta I + |I|\Delta n}{R} + \left|\frac{I n}{R^2}\right| \Delta R\right) + \left|\frac{I n}{R \sin^2 \alpha}\right| \Delta \alpha\right) =$$

Теперь подставим в полученную формулу значения величин и их погрешностей:

$$= 4 \cdot 3.1415 \cdot 10^{-7} \cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\dfrac{\cancel{10^3} \cdot 0.15 \cdot \cancel{10^3} + 2.4 \cdot 10^{-3} \cdot 25}{2 \cdot 0.1} + \dfrac{2.4 \cdot \cancel{10^{-3}} \cdot \cancel{10^3}}{2 \cdot \left(10^{-1}\right)^2} \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{\underbrace{\operatorname{tg} 45^\circ}_{=1}} + \frac{2.4 \cdot \cancel{10^{-3}} \cdot \cancel{10^3}}{2 \cdot 0.1 \cdot \sin^2 45^\circ} \cdot 0.0087\right) =$$

$$= 4 \cdot 3.1415 \cdot 10^{-7} \cdot \left(\frac{0.15 + 2.4 \cdot 10^{-3} \cdot 25}{2 \cdot 0.1} + \frac{2.4}{\cancel{10^{-2}}} \cdot 5 \cdot 10^{\cancel{-4}\,-2} + \frac{2.4}{2 \cdot 0.1 \cdot \underbrace{\sin^2 45^\circ}_{=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}}} \cdot 0.0087\right) =$$

$$= 12.566 \cdot 10^{-7} \cdot \left(1.05 + 0.12 + 0.2088\right) = 17.326 \cdot 10^{-7} =$$

Запишем значение погрешности в нормализованном виде и произведём округление:

$$= 1.7326 \cdot 10^{-6} \approx 1.7 \cdot 10^{-6}\, Тл.$$

6. Вычислим относительную погрешность. Обратите внимание – при вычислении в формулу мы подставляем ещё не округлённые значения:

$$\varepsilon = \frac{\Delta B_{Земли}}{B_{Земли}} = \frac{1.7326 \cdot 10^{\cancel{-6}\,-1}}{1.50792 \cdot \cancel{10^{-5}}} = 0.1149 \approx 0.11 = 11\%.$$

7. Запишем окончательный результат:

$$B_{Земли} = \left(1.51 \pm 0.17\right) \cdot 10^{-5}\, Тл,$$

$$\varepsilon = 11\%.$$

2.3 Задание 3 – расчёт относительной погрешности

2.3.1 Усложнённый вариант задания

Вывести формулу для расчёта относительной погрешности косвенных измерений, считая, что величины a, b, c, … являются результатами других прямых или косвенных измерений. При этом использовать метод логарифмирования исходной формулы.

Формула, для расчёта результата косвенных измерений:

$$Z = \frac{a\sin(b)}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \cdot \frac{\cos(c)}{a^2}.$$

Решение

1. Логарифмируем выражение и заменяем логарифм суммы суммой логарифмов, логарифм разности разностью логарифмов, все степени выносим, в качестве коэффициентов перед логарифмом:

$$\ln(Z) = \ln(a) + \ln(\sin(b)) - \frac{1}{2}\ln\left(b^2 - 4ac\right) + \ln(\cos(c)) + 2\ln(a)$$

2. Вычислим частные производные полученного после логарифмирования выражения по всем входящим в расчётную формулу величинам:

$$\frac{\partial(\ln Z)}{\partial a} = \frac{1}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-3c}{b^2 - 4ac} + 2 \cdot \frac{1}{a}$$

$$\frac{\partial(\ln Z)}{\partial b} = \frac{1}{\sin(b)} \cdot \cos(b) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2b}{b^2 - 4ac}$$

$$\frac{\partial(\ln Z)}{\partial c} = \frac{1}{\cos(c)} \cdot (-\sin(c)) - \frac{1}{2} \cdot \frac{-3a}{b^2 - 4ac}$$

3. Запишем формулу полного дифференциала от логарифма функции:

$$d(\ln Z) = \left(\frac{\partial(\ln Z)}{\partial a}\right) \cdot da + \left(\frac{\partial(\ln Z)}{\partial b}\right) \cdot db + \left(\frac{\partial(\ln Z)}{\partial c}\right) \cdot dc =$$

$$= \left(\frac{1}{a} + \frac{3c}{2\left(b^2 - 4ac\right)} + \frac{2}{a}\right) \cdot da + \left(ctg(b) - \frac{b}{b^2 - 4ac}\right) \cdot db +$$

$$+ \left(-tg(c) + \frac{3a}{2\left(b^2 - 4ac\right)}\right) \cdot dc$$

4. Преобразуем формулу полного дифференциала в формулу для расчёта относительной погрешности:

$$\varepsilon = \frac{\Delta Z}{Z} = \left|\frac{\partial(\ln Z)}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial(\ln Z)}{\partial b}\right| \Delta b + \left|\frac{\partial(\ln Z)}{\partial c}\right| \Delta c =$$

$$= \left|\frac{1}{a} + \frac{3c}{2\left(b^2 - 4ac\right)} + \frac{2}{a}\right| \Delta a +$$

$$+ \left|ctg(b) - \frac{b}{b^2 - 4ac}\right| \Delta b +$$

$$+\left|\frac{3a}{2\left(b^2-4ac\right)}-tg\left(c\right)\right|\Delta c$$

Необходимая формула получена.

2.3.2 Физически осмысленное задание

Температура нити лампы накаливания может быть рассчитана (с использование законов электрического тока и теплового излучения) по формуле:

$$T = \sqrt[4]{\frac{UI}{\pi dla\sigma}},$$

где

a – *степень черноты,*
d –*диаметр вольфрамовой нити спирали лампы,*
l –*длина вольфрамовой нити спирали лампы,*
U –*напряжение,*
I –*сила тока,*
σ –*постоянная Стефана-Больцмана.*

Вывести форму для относительной погрешности измерений (используя метод логарифмирования), рассчитать значение самой физической величины (температуры), относительной и абсолютной погрешности и представить результаты в соответствии с правилами округления.

Значение физических величин в результате измерения и их погрешности:

a=0.31±0.01, d=0.30±0.01 мм, *l*=5.00±0.05 см, U=127±2 В, I=0.31±0.05 А, σ=5.670367·10^{-8} Вт/(м^2·К^4)

Решение

1. Переведём значения величин с систему СИ:
   a=0.31±0.01,
   d=(3.0±0.1)·10^{-4} м,
   l=(5.00±0.05)·10^{-2} м,
   U=127±2 В,
   I=0.31±0.05 А,
   σ=5.670367·10^{-8} Вт/(м^2·К^4).
2. Подставим значения в формулу и произведём вычисление:

$$T = \sqrt[4]{\frac{UI}{\pi dla\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{127\cdot 0.31}{3.1415\cdot 3\cdot 10^{-4}\cdot 5\cdot 10^{-2}\cdot 0.31\cdot 5.670367\cdot 10^{-8}}} =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{127\cdot \cancel{0.31}\cdot 10^{14}}{3.1415\cdot 3\cdot 5\cdot \cancel{0.31}\cdot 5.670367}} = \sqrt[4]{\frac{127\cdot 10^{2}}{3.1415\cdot 3\cdot 5\cdot 5.670367}}\cdot 10^{3} =$$

$$= \sqrt[4]{47.52961}\cdot 10^{3} = 2.625676\cdot 10^{3}\,K =$$

$$= 2625.676K.$$

3. Прологарифмируем выражение:

$$\ln T = \ln\left(\sqrt[4]{\frac{UI}{\pi dla\sigma}}\right) = \ln\left(\frac{UI}{\pi dla\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\ln\frac{UI}{\pi dla\sigma} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln U + \ln I - \ln\pi - \ln d - \ln l - \ln a - \ln\sigma\right) =$$

$$= \frac{\ln U}{4} + \frac{\ln I}{4} - \frac{\ln\pi}{4} - \frac{\ln d}{4} - \frac{\ln l}{4} - \frac{\ln a}{4} - \frac{\ln\sigma}{4}.$$

4. Вычислим частные производные по всем величинам, имеющим погрешность:

$$\frac{\partial \ln T}{\partial U} = \frac{1}{4U},$$
$$\frac{\partial \ln T}{\partial I} = \frac{1}{4I},$$
$$\frac{\partial \ln T}{\partial d} = -\frac{1}{4d},$$
$$\frac{\partial \ln T}{\partial l} = -\frac{1}{4l},$$
$$\frac{\partial \ln T}{\partial a} = \frac{1}{4a}.$$

5. Запишем формулу полного дифференциала от натурального логарифма расчётной формулы:

$$d\ln T = \frac{\partial \ln T}{\partial U}dU + \frac{\partial \ln T}{\partial I}dI - \frac{\partial \ln T}{\partial d}dd - \frac{\partial \ln T}{\partial l}dl + \frac{\partial \ln T}{\partial a}da =$$
$$= \frac{1}{4U}dU + \frac{1}{4I}dI - \frac{1}{4d}dd - \frac{1}{4l}dl + \frac{1}{4a}da.$$

6. Преобразуем формулу полного дифференциала в формулу для вычисления относительной погрешности:

$$\varepsilon = \left|\frac{\partial \ln T}{\partial U}\right|\Delta U + \left|\frac{\partial \ln T}{\partial I}\right|\Delta I + \left|\frac{\partial \ln T}{\partial d}\right|\Delta d + \left|\frac{\partial \ln T}{\partial l}\right|\Delta l + \left|\frac{\partial \ln T}{\partial a}\right|\Delta a =$$
$$= \left|\frac{1}{4U}\right|\Delta U + \left|\frac{1}{4I}\right|\Delta I + \left|\frac{1}{4d}\right|\Delta d + \left|\frac{1}{4l}\right|\Delta l + \left|\frac{1}{4a}\right|\Delta a =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta U}{|U|} + \frac{\Delta I}{|I|} + \frac{\Delta d}{|d|} + \frac{\Delta l}{|l|} + \frac{\Delta a}{|a|}\right) =$$

   Теперь подставим в полученную формулу значения величин и их погрешностей, произведём вычисление и округление:

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{127} + \frac{0.05}{0.31} + \frac{10^{-5}}{3\cdot 10^{-4}} + \frac{5\cdot 10^{-4}}{5\cdot 10^{-2}} + \frac{0.01}{0.31}\right) =$$
$$= \frac{0.25263}{4} = 0.063157 \approx 0.063.$$

7. Вычислим значение абсолютной погрешности, как результат умножения относительной погрешности на значение самой физической величины. Обратите внимание – при вычислении в формулу мы подставляем ещё не округлённые значения. Затем произведём округление.

$$\Delta T = \varepsilon \cdot T = 0.0632 \cdot 2625.676 = 165.9427 \approx 170.$$

8. Округлим саму физическую величину исходя из округления погрешности:

$$T = 2625.676 \approx 2630K.$$

9. Запишем окончательный результат:

   – в не нормализованном виде

$$T = 2630 \pm 170 K ,$$

   – в нормализованном виде

$$T = \left(2.63 \pm 0.17\right) \cdot 10^3 K ,$$

   – относительная погрешность

$$\varepsilon = 0.063 = 6.3\% .$$

2.4 Задание 4 – полная обработка экспериментальных данных

Произвести полную обработку результатов физического эксперимента. Вычислить наиболее вероятные значения величин ***A, B, C****, и абсолютных погрешностей* ***ΔA****,* ***ΔB****,* ***ΔC****, рассчитать значение величины* ***F****, абсолютной и относительной погрешности* ***ΔF*** *и* ***ΔF/F****, произвести необходимые округления*.

Расчётная формула:

$$F = \frac{C^2}{\sqrt{C^2 - 1.6AB}} \tag{2.1}$$

Таблица 2.3

Таблица экспериментальных данных для заполнения

№ п/п	***A***	***ΔA***	***B***	***ΔB***	***C***	***ΔC***
1	11.3		0.035		0.91	
2	11.2		0.034		0.89	
3	11.5		0.031		0.87	
3	11		0.039		0.9	
5	11.9		0.035		0.95	
6	11.4		0.038		0.91	
7	11.5		0.032		0.84	
8	11.6		0.03		0.93	
9	11.1		0.033		0.96	
10	11.8		0.034		0.88	
Ср.						

Решение

Заполним таблицу, рассчитав средние значения величин A, B, C и вычислив частную погрешность каждой из этих величин во всех 10-и экспериментов (10 экспериментов для каждой величины). Затем вычислим среднее значение для каждой из 3-х погрешностей.

Таблица 2.4

Заполненная таблица

№ п/п	***A***	***ΔA***	***B***	***ΔB***	***C***	***ΔC***
1	11.3	0.13	0.035	0.0009	0.91	0.006
2	11.2	0.23	0.034	0.0001	0.89	0.014
3	11.5	0.07	0.031	0.0031	0.87	0.034
3	11	0.43	0.039	0.0049	0.9	0.004
5	11.9	0.47	0.035	0.0009	0.95	0.046
6	11.4	0.03	0.038	0.0039	0.91	0.006
7	11.5	0.07	0.032	0.0021	0.84	0.064
8	11.6	0.17	0.03	0.0041	0.93	0.026
9	11.1	0.33	0.033	0.0011	0.96	0.056
10	11.8	0.37	0.034	0.0001	0.88	0.024
Ср.	***11.43***	***0.23***	***0.0341***	***0.00212***	***0.904***	***0.028***

Расчёт средних значений:

$$A_{ср.} = \langle A \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{10} A_i}{10}; \quad B_{ср.} = \langle B \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{10} B_i}{10}; \quad C_{ср.} = \langle C \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{10} C_i}{10}; \qquad (2.2)$$

С этого момента примем средние значения за истины значения **A**, ***B*** и ***C***.

Расчёт частных погрешностей:

$$\Delta A_i = \left| A_i - A_{ср.} \right|; \quad \Delta B_i = \left| B_i - B_{ср.} \right|; \quad \Delta C_i = \left| C_i - C_{ср.} \right|. \qquad (2.3)$$

Обратите внимание – никаких отрицательных значений в колонке погрешностей быть не может! Все значения должны быть взяты по модулю! Расчёт средних погрешностей

$$\Delta A_{ср.} = \langle \Delta A \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{10} \Delta A_i}{10}; \quad \Delta B_{ср.} = \langle \Delta B \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{10} \Delta B_i}{10}; \quad \Delta C_{ср.} = \langle \Delta C \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{10} \Delta C_i}{10}; \qquad (2.4)$$

С этого момента примем средние значения погрешностей за истины значения ***ΔA***, ***ΔB*** и ***ΔC***.

Расчёт вычислений:

A=11.43,
ΔA=0.23,
B=0.0341,
ΔB=0.00212,
C=0.904,
ΔC=0.028.

Расчёт значения физической величины:

$$F=\frac{C^2}{\sqrt{C^2-1.6AB}}=\frac{0.904^2}{\sqrt{0.904^2-1.6\cdot 11.43\cdot 0.0341}}=1.8573321158$$

Вывод формулы для абсолютной погрешности:

$$\frac{\partial F}{\partial A}=\frac{1}{2}\frac{1.6BC^2}{\left(C^2-1.6AB\right)^{3/2}}=\frac{0.8BC^2}{\left(C^2-1.6AB\right)^{3/2}}, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial B}=\frac{1}{2}\frac{1.6AC^2}{\left(C^2-1.6AB\right)^{3/2}}=\frac{0.8AC^2}{\left(C^2-1.6AB\right)^{3/2}}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial C}=\frac{2C\cdot\sqrt{C^2-1.6AB}-C^2\cdot\frac{1}{2}\left(C^2-1.6AB\right)^{3/2}\cdot 2C}{C^2-1.6AB}. \tag{2.7}$$

Формула полного дифференциала:

$$dF=\left(\frac{0.8BC^2}{\left(C^2-1.6AB\right)^{3/2}}\right)dA+\left(\frac{0.8AC^2}{\left(C^2-1.6AB\right)^{3/2}}\right)dB+$$

$$+\left(\frac{2C\cdot\sqrt{C^2-1.6AB}-C^2\cdot\frac{1}{2}\left(C^2-1.6AB\right)^{3/2}\cdot 2C}{C^2-1.6AB}\right)dC. \tag{2.8}$$

$$\Delta F=\left|\frac{0.8C^2}{\left(C^2-1.6AB\right)^{3/2}}\right|\cdot\left(\Delta A+\Delta B\right)+\left|\frac{2C\cdot\sqrt{C^2-1.6AB}-C^2\cdot\frac{1}{2}\left(C^2-1.6AB\right)^{3/2}\cdot 2C}{C^2-1.6AB}\right|\Delta C \tag{2.9}$$

По полученной формуле рассчитываем абсолютную погрешность:

$$\Delta F=0.519665409$$

Из неё вычисляем значение относительной погрешности:

$$\varepsilon=\frac{\Delta F}{F}$$

Данный вывод и полученная формула слишком сложны. Вычисления по ней могут стать слишком трудоёмкими. Выведем формулу для расчёта относительной погрешности:

$$\ln\left(F\right)=2\ln\left(C\right)-\frac{1}{2}\ln\left(C^2-1.6AB\right), \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial\ln\left(F\right)}{\partial A}=\frac{0.8B}{C^2-1.6AB}, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial\ln\left(F\right)}{\partial B}=\frac{0.8A}{C^2-1.6AB}, \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial \ln(F)}{\partial C} = \frac{2}{C} - \frac{1.6C}{C^2 - 1.6AB}, \qquad (2.13)$$

$$d\ln(F) = \left(\frac{0.8B}{C^2 - 1.6AB}\right)dA + \left(\frac{0.8B}{C^2 - 1.6AB}\right)dB + \left(\frac{2}{C} - \frac{1.6C}{C^2 - 1.6AB}\right)dC, \qquad (2.14)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta F}{F} = \left|\frac{0.8B}{C^2 - 1.6AB}\right|\Delta A + \left|\frac{0.8A}{C^2 - 1.6AB}\right|\Delta B + \left|\frac{2}{C} - \frac{1.6C}{C^2 - 1.6AB}\right|\Delta C =$$

$$= \left|\frac{0.8 \cdot 0.0341}{0.904^2 - 1.6 \cdot 11.43 \cdot 0.0341}\right| \cdot 0.23 + \left|\frac{0.8 \cdot 11.43}{0.904^2 - 1.6 \cdot 11.43 \cdot 0.0341}\right| \cdot 0.00212 +$$

$$+ \left|\frac{2}{0.904} - \frac{1.6 \cdot 0.904}{0.904^2 - 1.6 \cdot 11.43 \cdot 0.0341}\right| \cdot 0.028 =$$

$$= \left|\frac{0.02728}{0.1935952}\right| \cdot 0.23 + \left|\frac{9.144}{0.1935952}\right| \cdot 0.00212 + \left|2.212389 - \frac{1.4464}{0.1935952}\right| \cdot 0.028 =$$

$$= 0.140913 \cdot 0.23 + 47.23258 \cdot 0.00212 + 5.25887 \cdot 0.028 = 0.279791.$$

В итоге, относительная погрешность равна:

$$\varepsilon = \frac{\Delta F}{F} = 0.279791$$

Теперь рассчитаем абсолютную погрешность:

$$\Delta F = \varepsilon \cdot F = 0.279791 \cdot 1.8573321158 = 0.519665409$$

Произведём необходимые округления полученных величин. Относительная погрешность всегда округляется до двух значащих цифр.

ΔF=0.5,

F=1.9,

ε=0.28 (28%).

Запишем окончательный результат. Именно он должен быть приведён в выводе лабораторной работы:

F=1.9±0.5, ε=28%.

Часть II

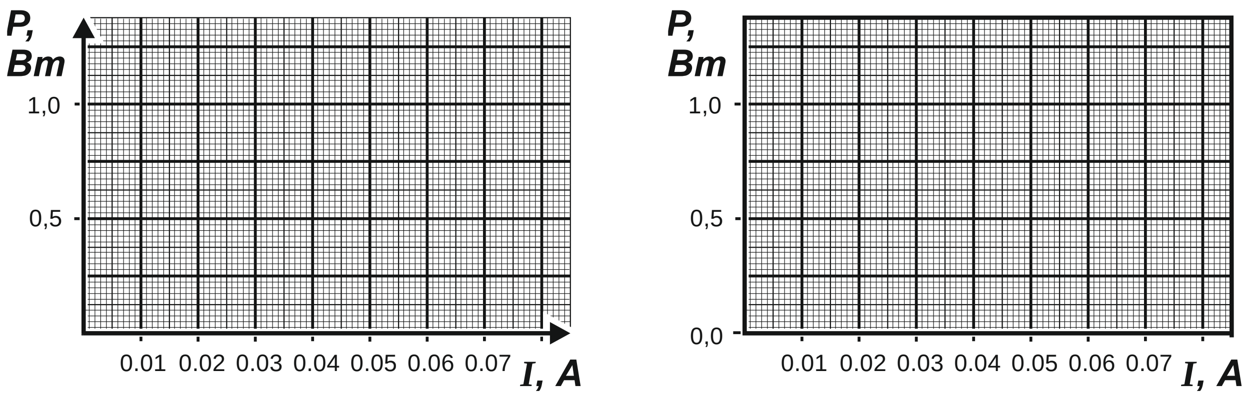
3 Графическое представление данных

Нередко в отчёте по лабораторной работе требуется изобразить график зависимости тех или иных величин. Разберём подробно общие принципы построения графиков.

График представляет собой (Рисунок 3.1) размеченную область на листе бумаги, где по горизонтали откладываются значения независимой переменной, а по вертикали – зависимой. Для указания направления и отображения значений переменных на графике изображается система координат. Независимая переменная, откладываемая в горизонтальном направлении, называется *абсцисса*, ось координат, по которой откладываются соответствующие значения – ось *абсцисс*. Зависимая переменная, откладываемая вертикально называется *ордината*, ось координата – ось ординат. На оси координат откладываются значения координат (по ним строится, изображается координатная сетка), отображаются названия осей (величин, откладываемых по этой оси) и их единицы измерения.

Для удобства изображения и восприятия графики изображаются на *миллиметровая бумага*. Миллиметровая бумага оптимальна для *координатной сетки* (масштаб – шаг координатной сетки, здесь 1 мм). Лист в клеточку – то, что можно использовать для изображения графика *в крайнем случае*. Но тогда он должен быть изображён на весь лист, чтобы масштаб одной клеточки (шаг координатной сетки) были достаточно малы по сравнению с отображаемым диапазоном величин ($\boldsymbol{X_{max}–X_{min}, Y_{max}–Y_{min}}$).

Система координат может быть двух видов: *математическая* и *инженерная*. В различных научных и инженерных отчётах, научных статьях требуется обязательно использовать какую-то одну из них. Это условие обычно оговаривается отдельно в требованиях к отчёту или статье.



а *б*

Рисунок 3.1

Система координат

а. математическая,

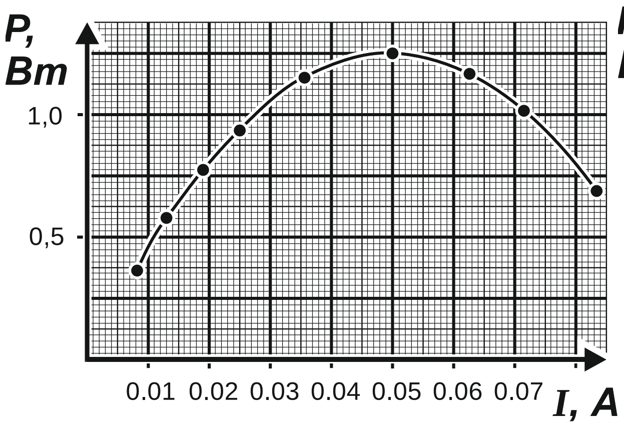
б. инженерная.

Математическая система координат – оси координат изображаются в виде стрелок, исходящих из начала координат. На конце осей (около стрелок, справа внизу для оси абсцисс и наверху для оси ординат) – их название или обозначение с единицами измерения (обязательно). Вдоль оси, снизу (ось абсцисс) или слева (ось ординат) – оцифровка, цифры наносятся с шагом равным единичному отрезку.

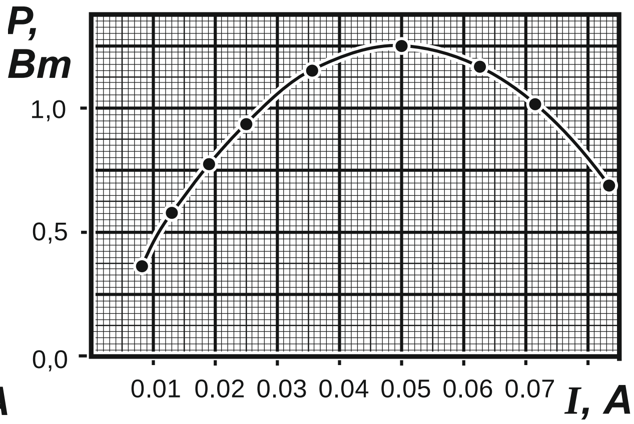
Инженерная система координат – прямоугольное окошко, стрелочки не изображаются. Если интересует положительный квадрант, оси координат – нижняя и левая границы окна. Оцифровка осей координат – по нижней и левой границам окна. Название осей координат – можно, как и у математической системы координат, можно посередине оси, внизу посередине нижней оси и слева посередине левой оси.

Для грамотного изображения графика обязательно правильно выбрать единичный отрезок, шаг оцифровки осей координат. Единичный отрезок обычно выбирают 1, 2, 5 ($\cdot 10^n$). То есть, чтобы число 10 (в нужном порядке) без остатка делилось на этот шаг.

Расположение осей. Если график целиком лежит в ***I*** (положительном) квадранте (*и абсцисса и ордината больше нуля*), начало координат располагается *слева внизу* (точка с координатами $(0;0)$). Но значения в этой точке в *математической системе координат* обычно не изображаются. В инженерной системе координат ***0*** может отображаться по одной или по обеим осям (Рисунок 3.2).



а



б

Рисунок 3.2

График ***P=P(U)***, ***I*** *квадрант*.

Если на графике важно отобразить не только поведение функции в ***I*** квадранте, для математическ4ой системы координат начало координат с точкой ***(0;0)***, оно же пересечение осей координат, может быть в середине координатной плоскости (Рисунок 3.3, а). Для *инженерной системы координат* оси координат в этом случае располагаются по середине окна (Рисунок 3.3, б). Так на графике зависимости задерживающего напряжения от частоты падающего света (явление внешнего фотоэффекта) точка пересечения прямой с осью ординат имеет смысл поверхностного потенциала. И он имеет отрицательное значение. Оцифровка и подпись осей координат производится аналогичным образом.

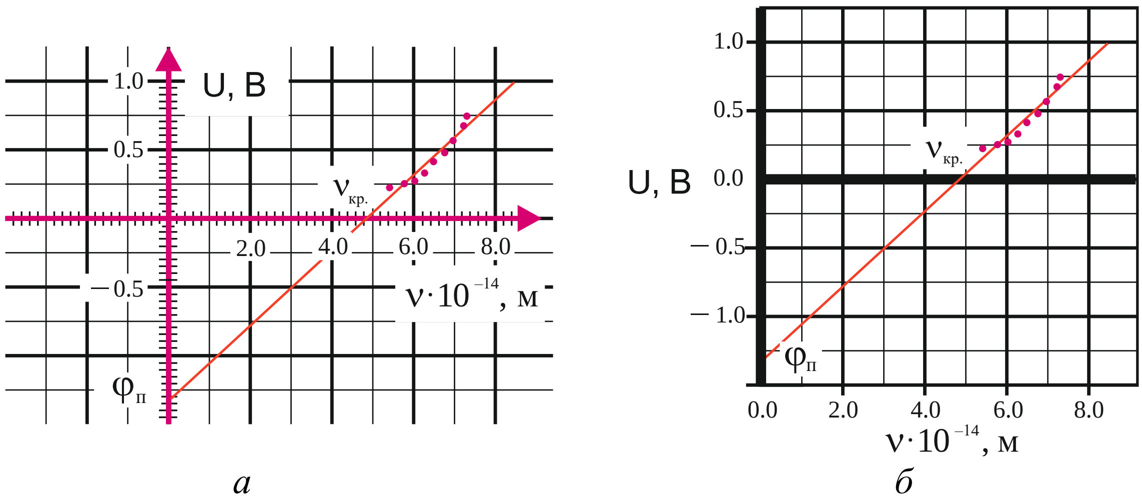
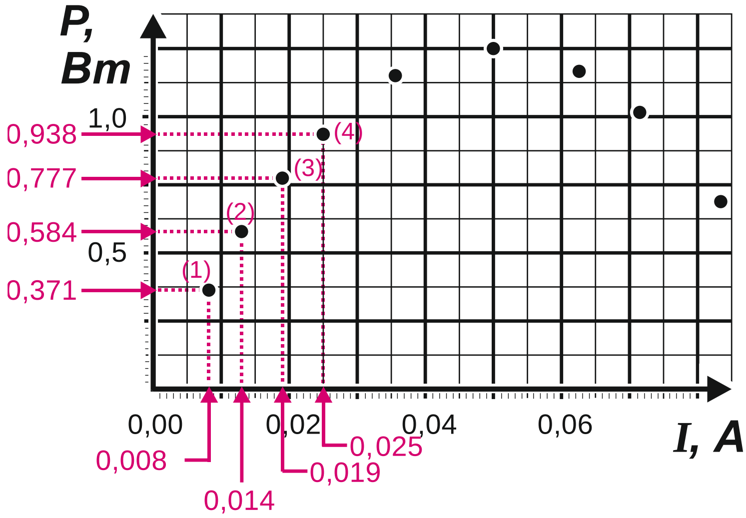


Рисунок 3.3

Зависимость задерживающего напряжения от частоты света.

Построение графика. На размеченную таким образом область наносятся точки соответственно их координатам (соответственно координатам каждой точки). То есть так, чтобы перпендикуляр на соответствующую ось координат отсекал на этой оси значение, равное данной координате этой точки. Даже теоретическая кивая строится по точкам, то есть точки должны быть явно изображены (Рисунок 3.4). Исключение составляет случай, когда изображаемая функция – *прямая*, и её уравнение мы знаем (проводим прямую по 2-м точкам, тогда эти точки можно не изображать) и прямая «проходящая наиболее близко ко всем точкам» (Рисунок 3.3). Далее точки соединяются линией – непосредственно графиком. Это может быть ломаная (Рисунок 3.5), состоящая из отрезков прямой либо плавная кривая (Рисунок 3.2). Всё зависит от конкретной постановки задачи, от того, что конкретно мы знаем об этой кривой.

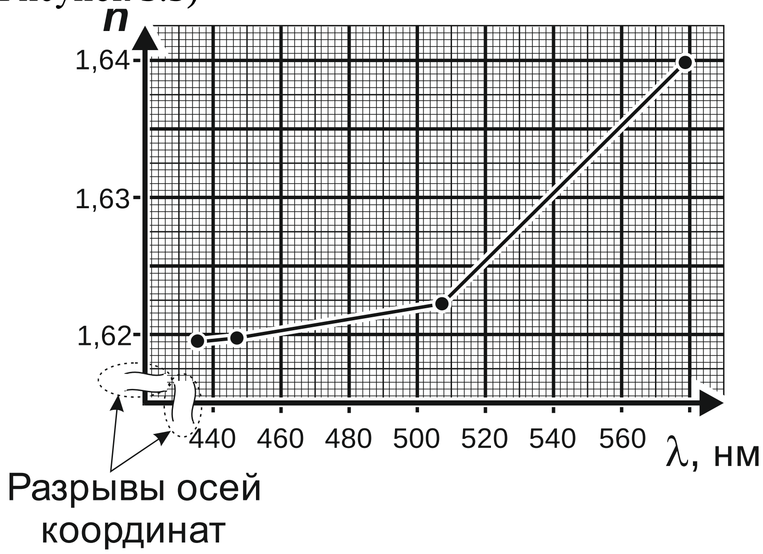


I,A	0.008	0.014	0.019	0.025	0.036	0.05	0.063	0.071	0.083
P, Вт	0.371	0.584	0.777	0.938	1.148	1.25	1.172	1.02	0.694

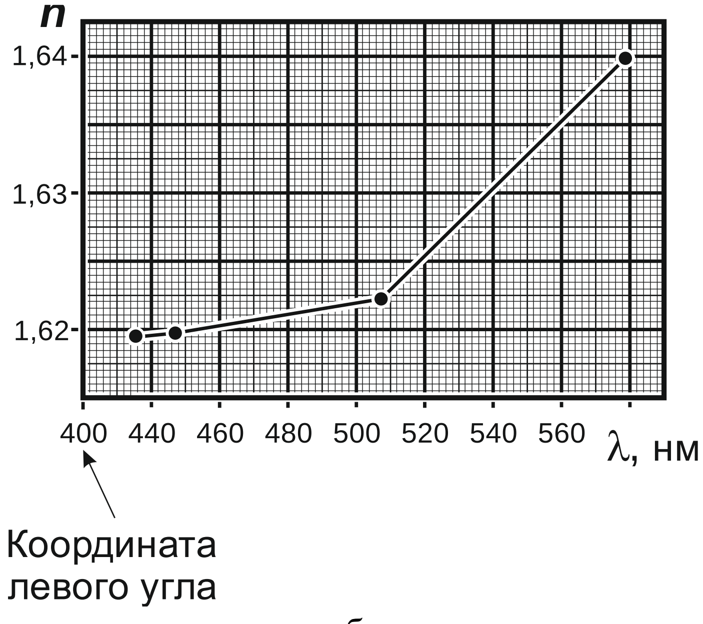
Рисунок 3.4
Построение графика по точкам

Исключение, когда точки не соединяются одной линией (ломаной или плавной) бывает тогда, когда мы знаем *математическую модель* этой зависимости (уравнение, описывающее данную кривую или прямую). В большинстве случаев (в большинстве простых случаев) это уравнение – прямая. Тогда график – прямая проводится таким образом, чтобы линия проходила наиболее близко ко всем изображённым точкам (Рисунок 3.3). Мы уже упоминали этот случай. *Математически точное решение* задачи при этом даёт *метод наименьших квадратов* (МНК). О нём мы поговорим ниже.

Изображаемый график должен использовать максимум полезной площади координатной плоскости, то есть быть развёрнут на всю плоскость, а не изображаться где-нибудь в небольшой области. И если нас отдельно (по какой-либо необходимости, см. выше) не интересует, скажем, пересечение графика с осями координат, график можно (*и нужно*) изобразить не всю, а *кусок координатной плоскости*, в которой расположен интересующий нас график. Тогда в правом нижнем углу, откуда исходят оси координат будет располагаться точка с координатами, отличными от (0;0). В этом случае для *математической системы координат* в начале осей изображается их разрыв. Для *инженерной системы координат* разрыв осей показывать не надо. Но зато значения по оси абсцисс и ординат в левом нижнем углу окна обычно указываются. (Рисунок 3.5)



а

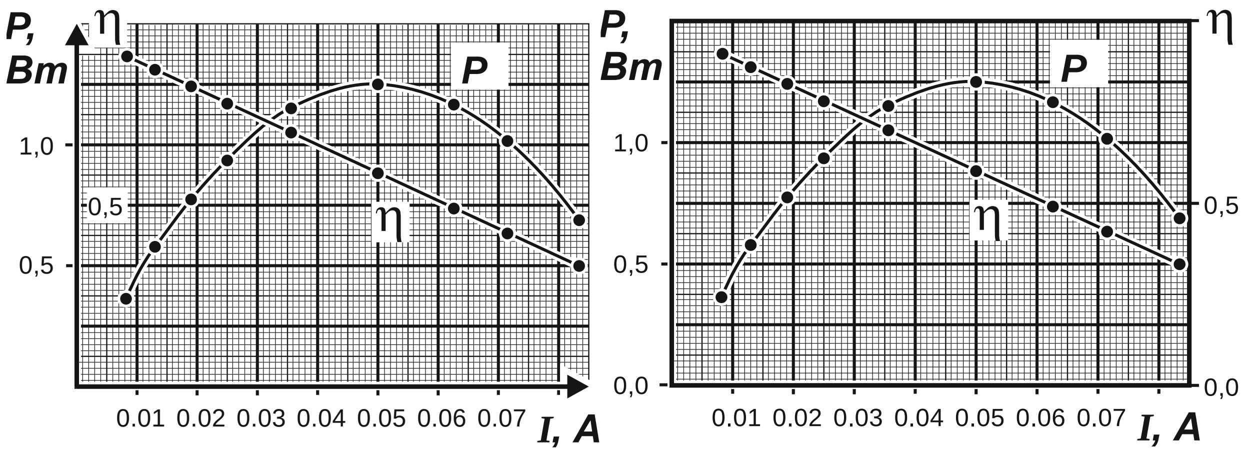


б

Рисунок 3.5

Графики, когда оси координат выходят не из ***0***

Иногда бывает необходимо изобразить несколько графиков с различными осами ординат на одной координатной плоскости. При этом независимая переменная у обоих графиков одинаковая (по оси абсцисс откладывается одна и та же величина). А, вот, значения функций различные величины с различной размерностью. Скажем, мы хотим наглядно увидеть, на какое значение КПД (η) придётся максиму полезной мощности электрической схемы (***P***). Тогда в направлении оси ординат нам надо изобразить 2- и более осей. В случае, если различных осей только 2-е (присутствуют две различные единицы измерения) мы можем оставить только одну ось, но… Для *математической системы координат* мы можем отложить различные значения с наружной и внутренней стороны оси (Рисунок 3.6 а). Для *инженерной системы координат*, вторая ось, обычно изображается по правому краю окна (Рисунок 3.6 б).



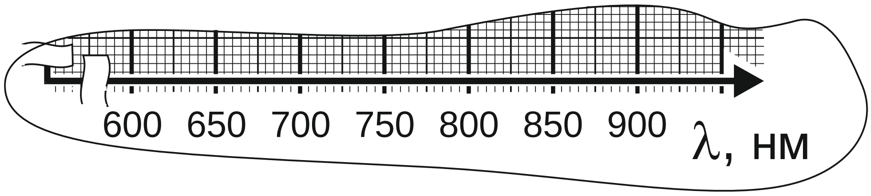
а б

Рисунок 3.6
Две оси координат

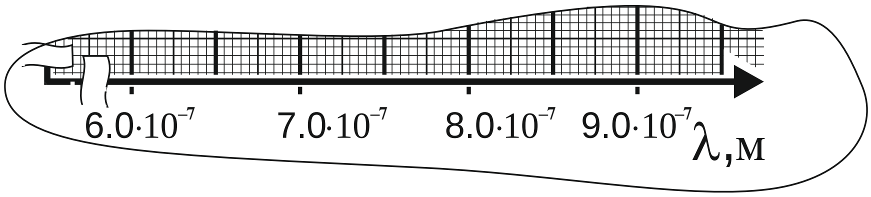
Как выносить порядок цифр на осях координат. Встречаются ситуации, когда оцифровка осей координат содержи один и тот же достаточно большой порядок. Вернёмся к графику зависимости показателя преломления от длины волны (Рисунок 3.5). Длина волны здесь обозначена в нанометрах (нм). Переведём её в систему СИ, в метры $\left(1\boldsymbol{нм} = 10^{-9}\boldsymbol{м}\right)$. Для простоты в наших рассуждениях будем изображать на рисунке только ось абсцисс (Рисунок 3.7 а, б). Но это не удобно – каждая подпись числа содержит один и тот же порядок, который загромождает надпись. Первое, что приходит на ум, вынести общий порядок куда-нибудь в одно место. К примеру, снизу или сбоку оси координат. Так, примеру, делают ряд программ, не претендующих на звание «научных». ***Так делать не надо***! Это не эстетично и безграмотно! Большинство научных журналов не примут у Вас статью с изображёнными так графиками, инженерный отчёт, оформленный таким образом тоже принят не будет.

Первы вариант, как можно снести порядок кисел – это снести его к единицам измерения (Рисунок 3.7 г). Эта надпись обозначает, что по оси отложены не метры, а *метры уже умноженные на* 10^{-7}. То есть, подставляя к числу единицы измерения, его ещё и нужно умножить на деять в это1 степени.

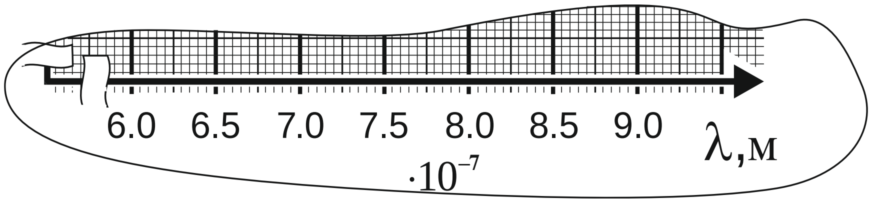
Второй вариант, как можно снести порядок – это снести его к названию оси – Рисунок 3.7 г. Здесь мы записали, что по оси отложена не длина волны λ, а длина волны λ, уже умноженная на 10^{7}. То есть, чтобы получить саму длину волны λ, цифру, написанную около оси координат, надо умножить на 10^{-7}. $\left(\textit{\textbf{Действительно}}: \left(\underbrace{\lambda\cdot 10^{7}}_{\text{Подпись – то, что отложено по оси}}\right)\cdot 10^{-7}=\lambda\right)$. В итоге, получим то, что надо.



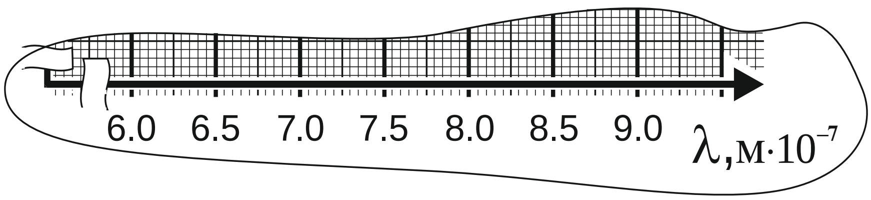
а



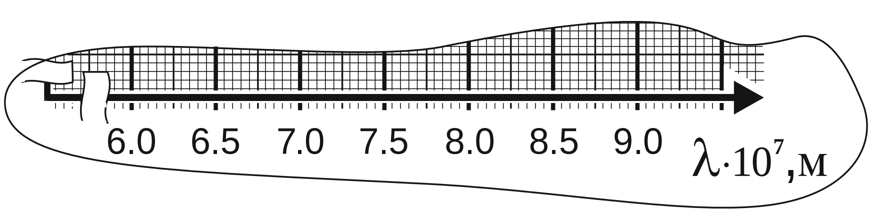
б



в – ТАК ДЕЛАТЬ НЕ НАДО!



г



д

Рисунок 3.7

Снос порядка на оси координат

Обратите внимание, если *при сносе* порядка от цифр на оси *к единицам измерения, знак у порядка сохраняется*, то *при сносе* его *к названию оси – меняет знак*. *Минус седьмой порядок числа превращается в седьмой*! Обычно в требованиях к журнальной статье или к отчёту по работе явно указывается, как должен сносится порядок.

Мы не приводим подобный пример для оси ординат. Там всё выглядит аналогично.

Графики с функциональными осями. Ещё один момент, на котором стоит остановится отдельно, случай, когда наш график «выглядит красиво», когда по осям координат отложены не сами значения величин точках, а некоторые функции от них. Допустим, мы хотим изобразить для цилиндрического конденсатора график зависимости напряжённости электростатического поля от расстояния до центра. Здесь напряжённость поля будет убывать пропорционально первой степени расстояния. В обычных координатах это будет гипербола. Но если по оси ординат отложить не расстояние, а обратную ему величину, график будет прямой. Так обычно и делают. При этом в качестве подписи по оси абсцисс изображают не ***r***, а ***1/r***. К этому вопросу мы ещё вернёмся, когда будем рассматривать линеаризацию нелинейных зависимостей в методе наименьших квадратов (МНК).

Изображение погрешностей и доверительные интервалы. И так, мы разобрались с тем, как изображаются на графике полученные нами *экспериментальные данные*. Но, как было сказано выше, все эти данные всегда содержат ошибку. Как отобразить на графике эту информацию? Для отображения этой информации на график наносят *доверительные интервалы* или *интервалы ошибок*. Пусть для наносимых на график точек мы знаем погрешность величины, откладываемой по оси абсцисс. Погрешность ординаты же нас не интересует. Тогда на график помимо точек наносятся отрезки, отсекающие диапазон по оси ординат, в который может попасть данная точка с учётом её погрешности (Рисунок 3.8).

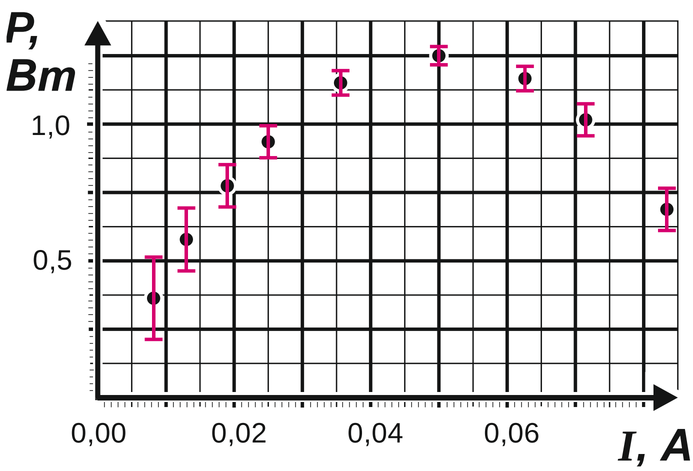


Рисунок 3.8
Изображение интервала ошибок для значений функции

Пусть точность наших измерений или вычислений больше в центре области, где расположены наши точки. Ближе к границам области наша ошибка растёт. Именно этот случай изображён на графике.

Теперь разберём случай, когда мы знаем погрешность как абсциссы, так и ординаты. Тогда отрезки, изображающие диапазон ошибок, надо откладывать как в вертикальном, так и в горизонтальном направлении (Рисунок 3.9).

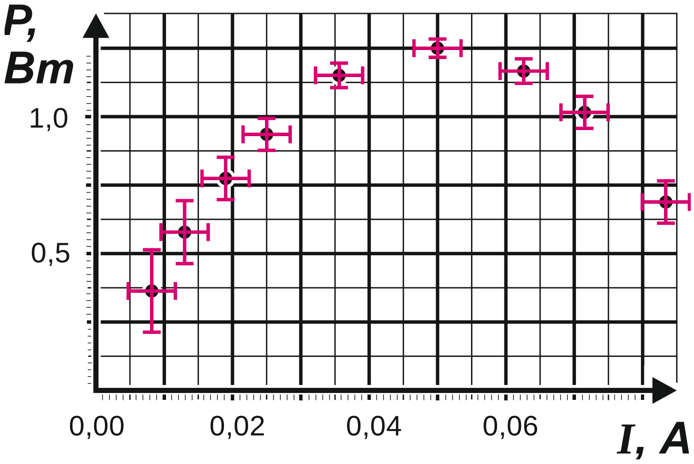


Рисунок 3.9

Изображение интервала ошибок для абсциссы и ординаты отображаемых точек одновременно

Здесь мы изобразили случай, когда ошибка по оси абсцисс одинакова для всех точек. Такое может быть, скажем, если погрешность определения силы тока ***I*** (как в данном случае) определяется неисключаемой систематической погрешностью – классом точности прибора. Причём, класс точности определяется от максимального значения шкалы прибора и, таким образом, одинаков для всех измерений.

Ну и последнее. Пусть нам удалось вычислить значение погрешности для каждой точки кривой, проведённой на графике (и такое возможно, один из способов вычисления подобных ошибок мы разберём ниже). *Тога коридор ошибок* или *доверительный интервал* мы можем изобразить двумя пунктирными линиями с двух сторон от нашей кривой (Рисунок 3.10).

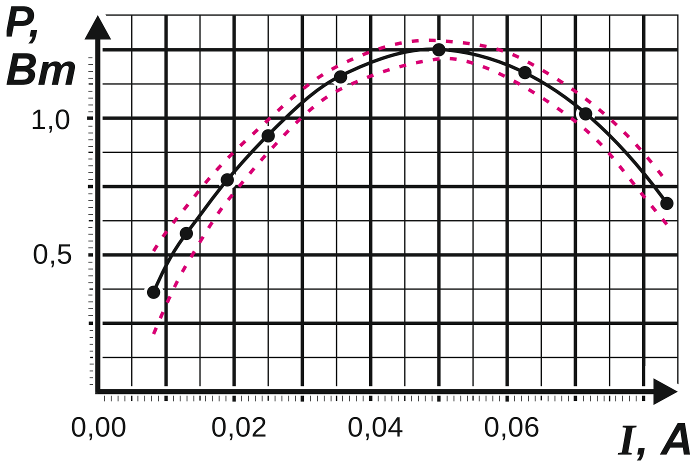


Рисунок 3.10

Изображение доверительного интервала для графика функции

4 Оформление отчёта по лабораторной работе

Полный «комплект документов», который должен предоставить студент для получения зачёта по лабораторной работе состоит из (1) ***листа наблюдений*** и (2) ***отчёта по лабораторной работе***.

Лист наблюдений является ***документом***, который нельзя исправлять, переписывать терять и т.д. Лист наблюдений подписывается кратко в верхней части листа, так, чтобы оставить максимум места на запись данных. Заголовок листа наблюдений должен содержать:

Номер и название лабораторной работы, ФИО студента, выполняющего работы, номер группы и число, когда получен допуск.

Ниже лист наблюдения подписывается преподавателем, давшим допуск студенту к лабораторной работе. Ниже этой подписи студентом записываются *все результаты измерений*, проделанных в ходе лабораторной работы. Результаты измерений должны *сразу записываться на лист наблюдений*. ***Запрещается*** яко бы из соображений аккуратности записывать результаты измерений ***сначала на черновик, а потом переносить на лист измерений***. При этом переписывании данные могут быть искажены. Запрещается вносить какие-либо изменения в лист наблюдений после записи. ***Измерить физическую величину можно только один раз, посмотрев на прибор!*** Если Вы поняли, что записанное Вами число неверно, Вы должны аккуратно зачеркнуть результаты измерений и ниже записать новые результаты. Новые результаты записываются в виде новой строки в таблице или новой таблицы. Если Вы (или инженер-лаборант) произвели исправления данных непосредственно в таблице или просто рядом с исходными результатами измерений, рядом должна стоять подпись инженера-лаборанта. Иначе лист измерений не считается действительным. Запрещается использовать в листе наблюдений корректирующую пасту («замазку»). Запрещается писать на листе измерений карандашом, чтобы имелась последующая возможность стирания или исправления результатов измерения. Лист наблюдения *со следами карандаша считается* ***недействительным***. После проведения всех измерений и занесения всех данных на лист наблюдения, лист наблюдения подписывается внизу инженером лаборантом. При этом инженер-лаборант также ставит дату проведения измерений.

Отчёт по лабораторной работе начинается с ***титульного листа***. Формат титульного листа (как и самого отчёта) определяется внутренним стандартом предприятия (в данном случае, стандартом СПбГТИ(ТУ)). Но в конечном счёте, все эти стандарты основываются на ЕСКД (Единый Стандарт Конструкторской Документации). Самое простое, как понять, что должно быть изображено на титульном листе – посмотреть первую страницу любых методических указаний, учебного пособия, учебника и т.д. Стандарт оформления первой страницы везеде практически один, с той лишь разницей (в отличии от учебника и методички), что авторов над заглавием нет, а ниже заголовка справа – кто выполнил и кто проверил. *Пример (образец) оформления титульного листа приведён ниже, в конце раздела*.

Далее, после титульного листа, с новой страницы следуют разделы (разделы нумеруются цифрами в начале и начинаются с нового абзаца):

1. ***Цель работы***. Кратко излагается задание к лабораторной работе. Обычно цель работы указана в методических указаниях к работе.
2. ***Схема установки***. Не надо изображать полный чертёж установки, изображение должно быть схематичным. В конечном счёте этот раздел – до некоторой степени творческий процесс.
3. ***Расчётные формулы***. Здесь приводятся все формулы, по которым будут производится расчёты, кроме формул для расчёта погрешностей. Они приводятся и выводятся в соответствующем разделе.
4. ***Результаты измерений***. В этом разделе приводятся ***все*** *исходные данные*, которые были записаны на листе измерений. Эти данные приводятся в том виде, что записывались при измерениях: в миллиметрах, сантиметрах, минутах, и т.д. Здесь же они переводятся в систему СИ. ***Производить расчёты необходимо только в системе СИ***. *Производить расчёты в другой системе единиц запрещено*! (Разделы (2) и (3), в принципе, могут меняться местами)
5. ***Пример расчёта*** или ***Расчёт***. Здесь должны быть приведены все расчёты, все результаты расчётов. Никакие цифры не должны здесь или потом быть «взяты с потолка». Как минимум для одного раза для каждой формулы должна быть приведена полная подстановкой исходных данных в формулу. Это необходимо для проверки Вашей работы и поиска возможных ошибок. Очень часто ошибки сводятся к тому, что в формулу подставляют неверные данные или данные в неверных единицах измерения. Если в работе есть в наличии серии измерений, здесь же нахождение средних значений для всех этих серий и их погрешности. Эти расчёты оформляются, обычно, в виде таблиц.
6. ***Расчёт погрешностей***. В этом разделе выводятся все формулы для расчёта погрешностей (именно так, как было разобрано в данном учебном пособии). И здесь же производится расчёт по этим формулам и последующее округление.
7. ***Выводы***. Выводы – это ответ на вопрос, поставленный в цели работы; а не сочинение на околофизическую тему! Если цель работы – определение каких-либо физических величин, констант, *приводим эти величины* с обозначениями, округлением и единицами измерением в системе СИ. Если в целе работы было определение ускорения свободного падения, его полученная величина должна быть приведена в выводе. Если в цели работы было сказано, что необходимо определить длину волны видимого света (скажем, с помощью колец Ньютона), длина волны должна быть приведена здесь. *Если необходимо, также приводим и эти величины в кратных единицах*. Так длина волны видимого света обязательно должна быть приведена в системе СИ – в метрах, но правильно и более грамотным

также привести значение этой величины в нанометрах (*нм*). Если надо, величина должна быть правильно нормализована. Так для длины волны видимого света должен быть вынесен именно 7-ой порядок при записи её в метрах $\left(\lambda_{\textit{Видимого света}} = (3.80 \div 7.40)\cdot 10^{-7}\,\boldsymbol{м}\right)$. Если цель работы – проверка закона, в выводе необходимо указать, верен этот закон или нет (*всё-таки, наверное, верен!*), какие числа, величина, значения равны каким, в пределах каких погрешностей («*Закон верен, так как значения величин ... совпадают в пределах погрешностей*»). И сами величины, и их погрешности должны быть приведены здесь же.

Иногда в отчёте необходимо привести (изобразить) график. Графики размещаются либо в теле раздела (5) – «*Пример расчёта*» или «*Расчёт*», либо в виде отдельного раздела, который следует после раздела (6) – «*Расчёт погрешностей*» и перед разделом «*Выводы*».

Ниже приведён ***пример оформления титульного листа*** к отчёту по лабораторной работе.

Министерство образования и науки Российской Федерации

Санкт-Петербургский Государственный технологический институт
(технический университет)

Кафедра общей физики

Лабораторная работа № __

Название лабораторной работы

Сдал: Иванов И.И.
Принял: Осташев В.Б.

Санкт-Петербург

2021

Часть III

5 Теория погрешностей. Углублённый подход

5.1 «Дартс», или как определить наиболее вероятный промах?

И так, мы определили, вычислили, нашли частные погрешности… Погрешности – результат случайных ошибок, неисключаемые систематические погрешности, не важно. Как с ними быть, что делать дальше? Первое, что приходит на ум – сложить все частные погрешности и получить максимально возможную погрешность:

$$\Delta y = \Delta y_a + \Delta y_b + \Delta y_c + \ldots \tag{5.1}$$

$$\Delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \Delta b + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \Delta c + \ldots \tag{5.2}$$

Но всегда ли это будет правильно?

Давайте рассмотрим пример – пусть мы играем в «Дартс», и наша задача попасть в центр мишени (в этой игре есть и более сложные варианты заданий) – Рисунок 5.1.

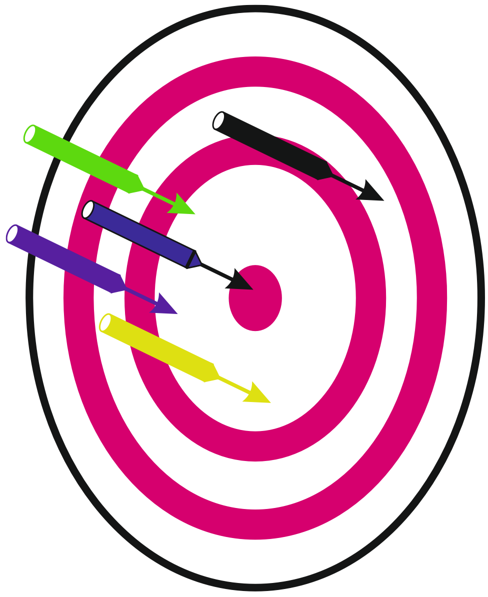


Рисунок 5.1

Скорее всего, наши попадания в цель будут представлять некий круг (Рисунок 5.2). В цент мы вряд ли попадём, по наши дротики будут втыкаться где-то вокруг желаемой точки. Давайте определим наш вероятный промах. Давайте считать, что по оси X и Y наши промахи равновероятны, и воткнувшиеся в мишень дротики образуют круг. Если это не так, то дротики воткнуться в мишень, образуя эллипс. Но это не изменит принципиально наших рассуждений. Поэтому промах по обеим осям равновероятен и результат попадания – круг.

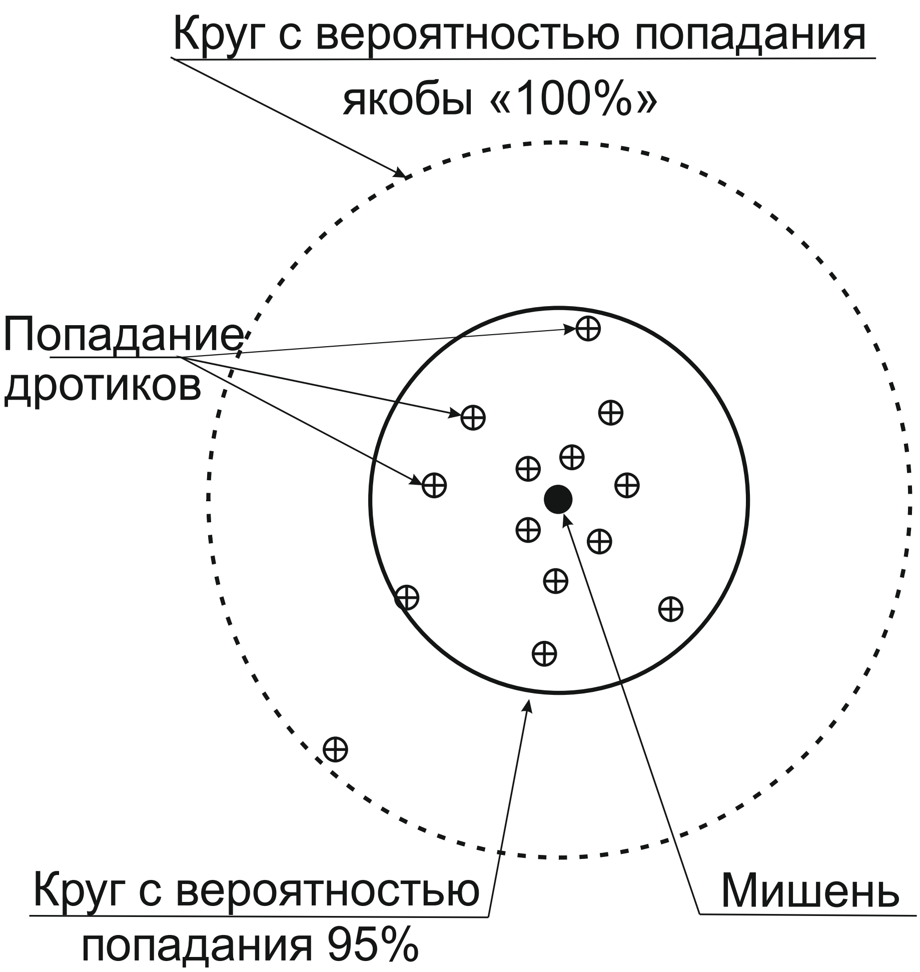


Рисунок 5.2

Нарисуем круг, в который попадут наши дротики. Мы, конечно, можем нарисовать круг, в который наши дротики воткнуться с вероятностью 100% (круг, обведённый пунктирной линией). На самом деле это самообман. Всегда есть вероятность, что нас кто-то отвлечёт, дернет за рукав, или мы просто задумаемся о чём-то о своём и кинем дротик совсем в другую сторону. Что же мы можем утверждать точно? Два варианта: «не сколько мы промахнёмся с наибольшей вероятностью» и «на в какой круг мы попадём с той или иной заранее заданной вероятностью». Выбор вопроса, на который из этих двух мы будем отвечать давайте оставим на потом. Ну, пусть, мы обозначили круг, в который мы попадём с вероятностью 95% (круг, обведённый жирной линией).

Теперь попытаемся определить радиус этого круга. Пускай у нас есть возможность автоматически, с помощь механизмов, определять промаши независимо по двум осям координат – X и Y. Как вычислить наиболее вероятный максимальный промах, зная промахи по той и другой оси координат? Мы не уверены, что промахи по осям X и Y будут одинаковы.

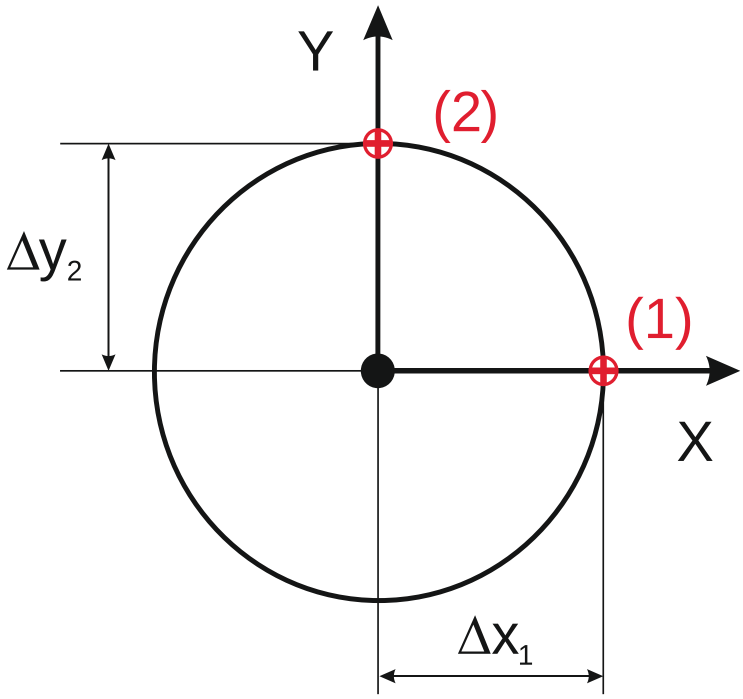


Рисунок 5.3

Рассмотрим точки на границе нашего круга (Рисунок 5.3). Сначала возьмём точку (1). Такой промах очень маловероятен. Для того, чтобы попасть в эту точку мы должны промахнуться на максимальную величину по оси X (но это ладно…), но, главное, мы должны вообще не промахнуться по оси Y. То есть, в этом случае ошибка по оси Y должна составлять 0. Это очень маловероятно.

$$(1):\quad \{\Delta x_1 = \Delta x_{Max}, \Delta y_1 \to 0\}$$

Теперь взглянем на точку (2). Здесь аналогичная ситуация. Промах по оси Y максимален, а промах по оси X равен 0.

$$(2):\quad \{\Delta y_2 = \Delta y_{Max}, \Delta x_2 \to 0\}$$

Давайте теперь рассмотрим ситуацию, когда промахи имеют некоторое среднее, наиболее вероятное значение – Рисунок 5.4.

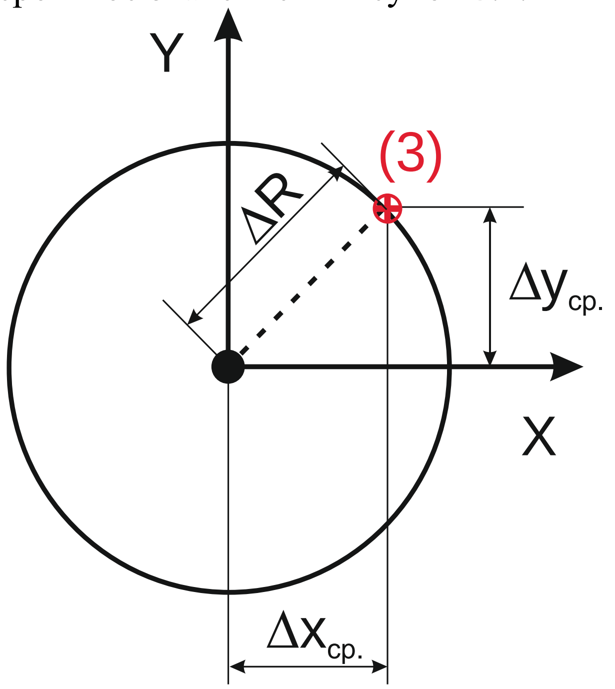


Рисунок 5.4

Пусть мы знаем $\Delta X_{\text{среднее}}$ и $\Delta Y_{\text{среднее}}$. Тогда радиус нашей окружности – промаха с вероятностью 95% можно вычислить, как:

$$(3):\quad \Delta R = \sqrt{\Delta x_{ср.}^2 + \Delta y_{ср.}^2}\ .$$

Если бы просто сложили модули наших промахов, то ушли бы далеко за границу нашего обозначенного круга (точка (4) – Рисунок 5.5):

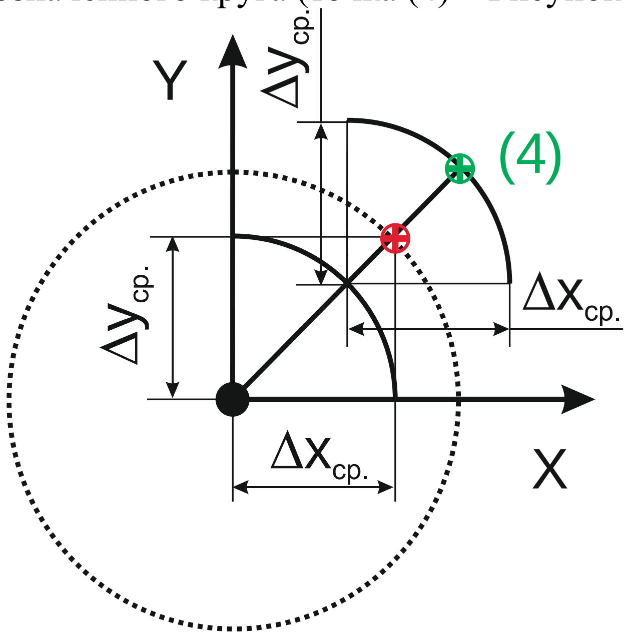


Рисунок 5.5

$$\Delta R_4 \gg \Delta R_3$$

Заметим, X и Y – независимые координаты. И наше расстояние – промах вычисляется, как расстояние в Евклидовом пространстве – по теореме Пифагора. Значит наши рассуждения с идеей «сложить все частные погрешности» была неправильной? Не совсем так… Не совсем так. Здесь надо поговорить о так называемых нормированных пространствах. Как мы знаем (и уже проходили по математики) пространства (множества), где «живут» вектора, называются векторными или линейными. Если в этих пространствах (множествах) мы добавим правило – способ вычисления длины вектора, они сразу станут нормированными. Ибо длина вектора называется его нормой.

Наша привычная норма (длина) вычисляется, как коренбь квадратный из суммы квадратов координат. Это норма называется Евклидовой, ибо отвечает правилу определения длины в нашем Евклидовом пространстве. Однако, это не единственный возможный вариант. Существуют и другие нормы, в частности, Манхетенская или «норма таксистов». Представьте себе, что Вы с другом или подругой живёте через парк и вас соединяет, алея парка. Но Вы знаете расстояние по двум перпендикулярным улицам, которые огибают парк (Рисунок 5.6).

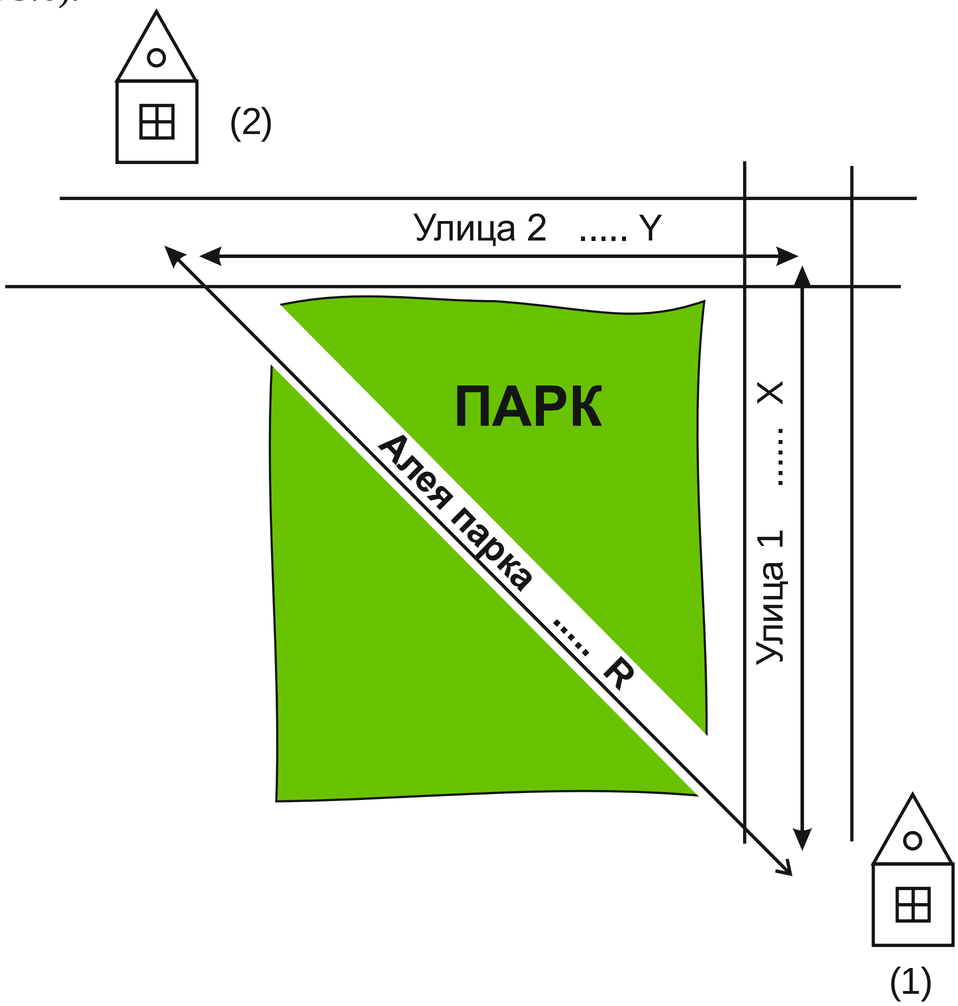


Рисунок 5.6

Каково расстояние между вашими домами? Если Вы собираетесь идти пешком, то расстояние будет равно тому, что Вы получите, приложив линейку к карте и учитывая масштаб. Возможно, в выражении через координаты – корень квадратный из суммы квадратов протяжённости двух улиц:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Но, если Вы спешите и решили воспользоваться услугами такси, то таксист возьмёт с Вас «по максимуму», то есть за расстояние, которое он проехал – длина улицы 1 плюс длина улицы 2.

$$S = |X| + |Y|$$

Вот поэтому вычисление длины, как сумма модулей координат – есть вычисление длины по *норме таксистов*.

Как же нам нужно подходить к вычислению наиболее вероятного и вероятно промаха стой или другой вероятностью, зная промахи по отдельным независимым переменным? Во-первых отметим, что наши переменные, независимые измерения, являются столь же независимыми координатами, как и координаты X и Y в нашем примере. Таким образом, значение результирующего промаха надо рассчитывать по евклидовой норме, как корень квадратный из суммы квадратов отдельных членов:

$$\Delta y = \sqrt{(\Delta y_a)^2 + (\Delta y_b)^2 + (\Delta y_c)^2 + \ldots}, \tag{5.3}$$

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\Delta c\right)^2 + \ldots}. \tag{5.4}$$

Ещё одно соображение, наводящее на мысль о том, что погрешность надо считать именно так. Рассматривая Рисунок 1.2, мы рассуждали о том, что заменяем саму функцию (на небольшом промежутке) её производной. Чуть ниже мы сказали, что полный дифференциал, о котором идёт речь задаёт касательную гиперплоскость (как продолжение идеи о касательной). Так вот, в данном случае, при расчёте результирующей погрешности, речь идёт о расчёте расстояния между двумя точками по этой гиперплоскости. А как рассчитать расстояние между двумя точками в евклидовом пространстве? Именно так – корень квадратный из суммы квадратов разностей координат (теорема Пифагора). Именно то, что мы и получили в конце наших рассуждений.

Однако, есть ли вероятность, что все наши частные погрешности, всё-таки, сложатся? Да, если количество независимых переменных невелико. Тем не менее, если следовать требованиям ГОСТ, то практически всегда требуется вычислять корень квадратный из суммы квадратов, а не складывать по модулю частные погрешности. То есть, пользоваться формулами (5.3) и (5.4).

Так в случае косвенных измерений таким алгоритмом вычислений необходимо пользоваться всегда (расчёт по формулами (5.3) и (5.4)). Сумма *неисключаемой систематической* и *случайной* погрешностей одной величины, рассмотренная нами в разделе 1.4, на самом деле надо рассчитывать так:

$$\Delta Y = \sqrt{\left(\Delta Y_{Систематическая}\right)^2 + \left(\Delta Y_{Случайная}\right)^2}\ .$$

На самом деле, алгоритм расчёта здесь ещё более сложен и включает некоторый набор дополнительных эмпирических коэффициентов. Но сейчас мы не будем углубляться в этот вопрос.

Исключение составляет случай, когда для одной физической величины, результата прямых физических измерений, присутствует несколько *неисключаемых систематических погрешностей*. Если их число не более 2-х, и они просто суммируются (*без коэффициентов в виде производных*). То они суммируются по алгоритму, представленному формулами (5.1) и (5.2):

$$\Delta Y = \Delta Y_a + \Delta Y_b\ .$$

Если в этом же случае число слагаемых, максимум 1-н из которых суммируется без весовых коэффициентов, не превосходит 3-х, то мы также должны пользоваться формулами (5.1) и (5.2):

$$\Delta Y = \Delta Y_a + \frac{\partial Y}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial Y}{\partial c}\Delta c$$

либо

$$\Delta Y = \frac{\partial Y}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial Y}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial Y}{\partial c}\Delta c$$

Во всех остальных случаях для расчёта надо использовать формулы (5.3) и (5.4).

Тем не менее, в реальной инженерной практике очень часть вместо рекомендованного подхода, используют тот алгоритм, что был рассмотрен нами в разделе 1.2.3 и 1.2.4, то есть формулы (5.1) и (5.2), и соответствующие им формулы для относительной погрешности. В общем случае это будет формула (5.5):

$$\Delta Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta Y_{Систематическоая\quad i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2}\ . \qquad (5.5)$$

5.2 Вычисление случайной погрешности прямы физических измерений

Теперь попытаемся понять, всё ли правильно с определением случайной погрешности измеряемой величины в случае серии измерений. Пусть мы-таки, бросаем дротики в мишень. (Рисунок 5.7). Но пусть пошёл дождь и центр круга при этом смыло (Рисунок 5.8). *Как* для начала *оценить ту точку, в которую мы бросали дротики*? Истинное положение цели не изображено на мишени – его смыл дождь, и тот, кто хочет понять, куда на самом деле мы кидали свои стрелки, может основываться лишь на результатах нашего попадания. Наверное, такой точкой, нашей целью, будет точка *с координатами – среднем арифметическим от координат нашего попадания в цел*ь:

$$\langle X \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}, \qquad \langle Y \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{N}$$

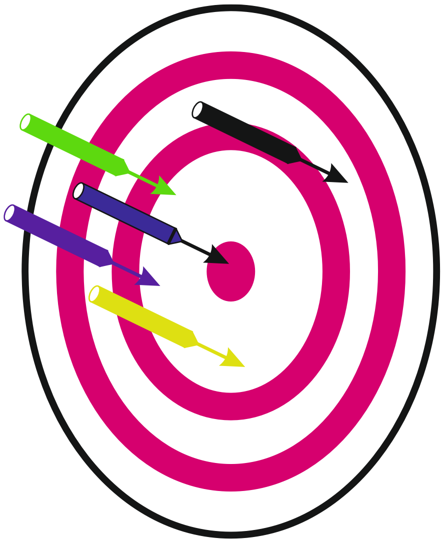


Рисунок 5.7
Бросаем дротики, истинное положение цели – изображённый центр круга

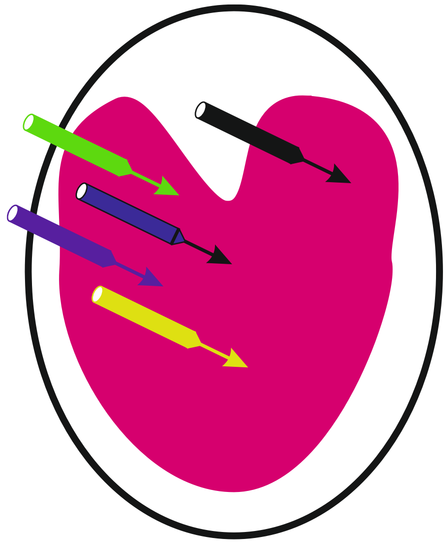


Рисунок 5.8
Бросаем дротики, истинное положение цели можно определить лишь по нашим попаданиям в мишень

Наиболее вероятное значение случайной величины в математике (в теории вероятностей и математической статистике) называется *математическим ожиданием*. В нашем случае это будет $\boldsymbol{M_X}$ и $\boldsymbol{M_Y}$. или $\boldsymbol{M[X]}$ и $\boldsymbol{M[Y]}$.

В случае, если случайная величина (наша измеряемая величина) ведёт себя «хорошо» (с математической точки зрения, *имеет нормальное распределение*), то математическое ожидание этой величины может быть оценено, как среднее арифметическое значение:

$$\mathrm{M}_{\xi} = \mathrm{M}\left[\xi\right] \approx \frac{1}{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{N}} \xi_{\boldsymbol{i}}$$

В нашем примере:

$$\mathrm{M}_{\boldsymbol{X}} \approx \frac{1}{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}} \quad \text{и} \quad \mathrm{M}_{\boldsymbol{Y}} \approx \frac{1}{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{i}}\ .$$

Примем эти значения за истинные значения измеряемых величин.

А вот дальше попробуем оценить погрешность, с которой нам известны ваши величины $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, то есть значения $\boldsymbol{\Delta X}$ и $\boldsymbol{\Delta Y}$. Вычислив их, дальнейший алгоритм нам понятен. Значением нашей ошибки (результирующий промах $\boldsymbol{\Delta R}$) будет корень квадратный из ошибок этих величин:

$$\Delta R = \sqrt{\left(\Delta X\right)^2 + \left(\Delta Y\right)^2}\ .$$

В силу того, что для $\boldsymbol{X}$ и для $\boldsymbol{Y}$ все наши действия абсолютно совпадают, остановимся на одной из них. Пусть это будет $\boldsymbol{X}$. Рассчитаем для этой величины частные погрешности – ошибки в каждом отдельном случае:

$$\Delta X_i = \left|\bar{X} - X_i\right|.$$

Пусть мы следуем нашей прежней логике (раздел 1.2.2) – будем определять наиболее вероятное значение этой величины и, как всегда, вычислим среднее значение:

$$\Delta X_{ср.ар.} = \left\langle \Delta X \right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \Delta X_i\ .$$

Есть ли вероятность того, что наша ошибка реально будет больше, чем найденная таким образом? Очевидно, «Да». Заметьте, это *наиболее вероятная*, а не *максимальная ошибка*. Даже в нашей серии мы умудрялись промахнуться больше! А каким должно быть значение абсолютной погрешности, чтобы мы попали в казанный нами коридор

$$X = \left\langle X \right\rangle \pm \Delta X \Rightarrow \left\langle X \right\rangle - \Delta X \le X \le \left\langle X \right\rangle + \Delta X$$

с вероятностью 95%? Или с какой-либо другой вероятностью? а возможно ли найти такую величину $\boldsymbol{\Delta X}$, чтобы наша ошибка была заведомо меньше неё?

Давайте вычислим следующую величину – средний квадрат отклонения истинного и измеренного значения:

$$\tilde{S}_X = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \Delta X_i^2}$$

Эта величина не меньше, чем та, что мы получили вначале:

$$\Delta X_{ср.ар.} \le \tilde{S}_X$$

(вспомните наш пример в разделе 1.2.1). Отсюда следует, что она перекроет тот диапазон, куда, скорее всего, попадёт наше значение. Но, главное, она более удобна, как характеристика разброса нашей случайной величины.

Теперь введём пару определений.

Среднее квадратичное отклонение величины ***X***:

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta X_i^2}{N-1}}\ .$$

Наличие в знаменателе величины $(N-1)$, а не N, можно пояснить приблизительно так– дельт (разностей) всегда на одну меньше, чем элементов множества. Если 2-а элемента, то разброс, разница между ними 1-а.

Квадрат этой величины называется *среднем квадратом отклонения*:

$$S_X^2 = \left(S_X\right)^2.$$

В качестве основной числовой характеристики случайного рассеяния результатов измерения принята *дисперсия* **D** и *стандартное отклонение* ***σ***.

$$D = \sigma^{\ 2}.$$

Дисперсия – это *математическое ожидание (*наиболее вероятное значение) среднего квадрата отклонения:

$$D_X = D\left[X\right] = \sigma^2 = M_{S_X^2} = M\left[S_X^2\right].$$

Однако математическое ожидание оценки ***S*** отлично от **σ**, так как оценка ***S*** смещена. несмещённую оценку ***S*** рассчитывают по формуле:

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta X_i^2}{N-1.5}}\ .$$

Среднее квадратичное отклонение среднего арифметического (оценка изменения самой величины, а не её измерений) рассчитывается по формуле:

$$S_{\langle X\rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}} S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta X_i^2}{N\left(N-1.5\right)}},$$

и именно этот параметр является величиной, позволяющей оценить ошибку измерений:

$$D_{\langle X\rangle} \approx S_{\langle X\rangle}^2,$$

$$\sigma_{\langle X\rangle} \approx S_{\langle X\rangle}.$$

Для вычисления *случайной ошибки* измерения физической величины, оценку стандартного отклонения σ надо умножить на специальную величину – коэффициент распределения Стьюдента, который определяется по таблицы (Таблица 5.1 или Таблица 5.2). Этот коэффициент зависит от той вероятности, с которой мы хотим, чтобы наша ошибка *не превзошла* рассчитанную величину (*доверительная вероятность* $\boldsymbol{P}$) и количества измерений $\boldsymbol{N}$:

$$\Delta \boldsymbol{X} = \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{N}-1\right) \cdot \boldsymbol{S}_{\langle X \rangle}.$$

Обратите внимание, что по коэффициент распределения Стьюдента ищется не по числу $\boldsymbol{N}$ количества экспериментов, а величине, на единицу меньше $\left(N-1\right)$.

Таблица 5.1

Коэффициенты ***t*** для случайной величины, имеющей распределение Стьюдента (в зависимости от числа опытов и доверительной вероятности)

m	3	4	5	6	7	8	9	10
P=[0.1÷0.5]	0.277	0.271	0.267	0.265	0.263	0.262	0.261	0.260
P=[0.5÷0.75]	0.978	0.941	0.920	0.906	0.896	0.889	0.883	0.879
P=[0.75÷0.87]	1.638	1.533	1.476	1.440	1.415	1.397	1.383	1.372
P=[0.87÷0.94]	2.353	2.132	2.015	1.943	1.895	1.860	1.833	1.812
P=[0.94÷0.975]	3.182	2.776	2.571	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228
P=[0.975÷0.989]	4.541	3.747	3.365	3.143	2.998	2.896	2.821	2.764
P=[0.989÷0.9989]	5.841	4.604	4.032	3.707	3.499	3.355	3.250	3.169
P>0.9989	12.941	8.610	6.859	5.959	5.405	5.041	4.781	4.587

Таблица 5.2

Коэффициенты распределения Стьюдента для большого количества измерений о доверительных вероятностей 0.95% и 0.99%

m	P=0.95	P=0.99
10	2.228	3.169
12	2.179	3.055
14	2.145	2.977
16	2.120	2.921
18	2.101	2.878
20	2.086	2.845
22	2.074	2.819
24	2.064	2.797
26	2.054	2.779
28	2.048	2.763
30	2.042	2.750
$\propto$	1.960	2.576

Окончательно, случайная погрешность при измерении физической величин должна вычисляться по формуле:

$$\Delta \boldsymbol{X} = \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{N}-1\right)\cdot\sqrt{\frac{\sum\limits_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{N}}\left(\left\langle \boldsymbol{X}\right\rangle - \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}\right)^2}{\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{N}-1.5\right)}},$$

где

P – доверительная вероятность, с которой ошибка результата измерений не превзойдёт указанное значение,

N – число измерений,

t – коэффициент распределения Стьюдента.

Также стоит отметить следующий факт. Существует представление, что *максимальная погрешность* (**Δ*X*** никогда не превзойдёт…) 3σ:

$$\Delta \boldsymbol{X}_{\max} = 3\sigma = 3\sqrt{\frac{\sum\limits_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{N}}\left(\left\langle \boldsymbol{X}\right\rangle - \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}\right)^2}{\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{N}-1.5\right)}}.$$

В последнее время в литературе появились утверждения, что даже величина 2σ может считаться максимально возможным значением погрешности. На самом деле, утверждение, что $\Delta X \le 3\sigma$ верно лишь для большого числа измерений. Конкретно, для $n \ge 15$ $\left(t\left(n=14, P=0.99\right)=2.977\right)$. В нашем случае лабораторного практикума ***N***=3÷5, иногда ***N***=10, в аналитической химии (в том числе приборный эксперимент) ***N***=3÷5, так что данный критерий неприменим. В инженерной практика критерий 3σ не применяется также.

5.3 Пример расчёта погрешности в соответствии с ГОСТ

6 Аппроксимация результатов по методу наименьших квадратов

6.1 Метод наименьших квадратов. Линейная регрессия

Нередко при решении поставленных задач нам необходимо заменить набор экспериментальных данных известной зависимостью, известным уравнением. И наиболее простыми случаем является замена этого набора точек примой. Мы уже сталкивались с формулировкой «…*провести прямую, наиболее близко ко всем точкам*». В такой формулировке задача более подходит под категорию искусства, но никак не точных наук. Точное решение этой задачи даёт *метод наименьших квадратов* (***МНК***). Но сначала дадим несколько определений.

Аппроксимация – в математике так называется *замена одного математического элемента другим*, обычно более сложного более простым. Например, *круг* можно *аппроксимировать многоугольником*. Так *одну* (обычно более сложную) *функцию можно аппроксимировать другой* (обычно, более простой).

Интерполяция – нахождение неизвестных промежуточных значений некоторой функции, по имеющемуся дискретному набору её значений. То есть, по существу, нахождение неизвестных параметров функции по набору её значений, аппроксимация функции, заданной в наборе точек, значением в узлах, известным уравнением.

Экстраполяция – аппроксимация функции, заданной в наборе точек, значением в узлах, известным уравнением вне диапазона, где лежат эти точки. То есть, продление этой функции на тот диапазон, где её значения нам заранее не известны.

Кога речь идёт об аппроксимации экспериментально найденных значений известным *уравнением тренда*, мы имеем дело уже не с набором точных значений заданной функции в узловых точках, а о наборе случайных величин, поскольку, как мы разбирали в первой части этого изложения, экспериментальные данные всегда содержат случайную ошибку и, таким образом, не являются точным значением функции, описывающей искомую зависимость. Поэтому в данном случае речь может идти о *регрессии*.

Регрессия – зависимость среднего значения (математического ожидания) случайной величины от некоторой другой величины или нескольких величин. Выражение этой зависимости в виде уравнения называется *уравнением регрессии* или *уравнением тренда* (*тренд* – основная тенденция изменения случайной величины).

Для поиска уравнения регрессии наиболее часто используется *метод наименьших квадратов* (***МНК***). Суть метода сводится к тому, что мы записываем выражение, задающее сумму квадратов отклонения имеющихся у нас значений случайной величины в известных точках (экспериментальных данных) от значения в этих точках искомой нами функции (с ещё неизвестными нам параметрами). Выражение будет выглядеть так:

$$\boldsymbol{S}=\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{Y}_i-\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{X}_i\right)\right)^2. \qquad (6.1)$$

Причём, рассматриваем это выражение, как функцию неизвестных параметров искомой нами функции:

$$\boldsymbol{Y}=\mathrm{f}_{a,b,c,\ldots}\left(\boldsymbol{X}\right)\Rightarrow\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\ldots\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{Y}_i-\boldsymbol{f}_{a,b,c,\ldots}\left(\boldsymbol{X}_i\right)\right)^2. \qquad (6.2)$$

А дальше решаем задачу на поиск экстремума этой зависимости по неизвестным параметрам. Берём производные, приравниваем нулю, и т.д.:

$$\mathrm{Min}_a\left(\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\ldots\right)\right)\Rightarrow\frac{\partial\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\ldots\right)}{\partial\boldsymbol{a}}=0,$$

$$\mathrm{Min}_b\left(\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\ldots\right)\right)\Rightarrow\frac{\partial\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\ldots\right)}{\partial\boldsymbol{b}}=0, \qquad (6.3)$$

$$\ldots$$

И так далее. Решая полученную систему уравнений, находим неизвестные параметры искомой функции.

Наиболее часто возникающей задачей подобного рода является построение уравнения регрессии в виде полинома. И эта задача давно имеет готовое точное решеб́ние в виде готовых расчётных формул. Но нас будет интересовать даже более простая задача – *задача* поиска уравнения *линейной регрессии*. В этом случае нам необходимо найти какие *параметры*, коэффициенты ***a*** и ***b***, для уравнения

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{X}+\boldsymbol{b}, \qquad (6.4)$$

Чтобы в итоге наша прямая, описываемая этим уравнением, прошла наиболее близко к нашим экспериментальным точкам. В этом случае квадрат разности расчётных и исходно заданных (экспериментальных) значений будет минимален, целевая задача МНК будет достигнута.

Решение этой задачи, построение уравнения линейной регрессии с помощью МНК, для набора и ***N*** точек $\left\{\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y}_i\right\}$ дает следующие расчётные формулы для коэффициентов:

$$\boldsymbol{a}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{X}_i\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Y}_i-\boldsymbol{N}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{Y}_i}{\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{X}_i\right)^2-\boldsymbol{N}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{X}_i^2} \qquad (6.5)$$

и

$$\boldsymbol{b}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Y}_i-\boldsymbol{a}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{X}_i}{\boldsymbol{N}}. \qquad (6.6)$$

Для того, чтобы решить эту задачу (не прибегая к услугам программ типа Excel и т.д.), необходимо заполнить таблицу (Таблица 6.1). В ней надо заполнить исходными значениями столбцы «$\boldsymbol{X}$» и «$\boldsymbol{Y}$» (серые клетки), рассчитать значения всех остальных столбцов и затем просуммировать все столбцы.

Таблица 6.1

Вычисление коэффициентов линейной регрессии

№	$\boldsymbol{X}$	$\boldsymbol{Y}$	$\boldsymbol{X^2}$	$\boldsymbol{X \cdot Y}$
1 **2** **…** **N**	X_1 X_2 … X_N	Y_1 Y_2 … Y_N	X_1^2 X_2^2 … X_N^2	X_1Y_1 X_2Y_2 … X_NY_N
$\Sigma_\xi = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$	$\Sigma_X = \sum_{i=1}^{N} X_i$	$\Sigma_Y = \sum_{i=1}^{N} Y_i$	$\Sigma_{X^2} = \sum_{i=1}^{N} X_i^2$	$\Sigma_{XY} = \sum_{i=1}^{N} X_i Y_i$

а результаты суммирования подставить в следующие формулы:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\Sigma_X \Sigma_Y - \boldsymbol{N}\Sigma_{XY}}{(\Sigma_X)^2 - \boldsymbol{N}\Sigma_{X^2}}, \tag{6.7}$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{\Sigma_Y - \boldsymbol{a}\Sigma_X}{\boldsymbol{N}}. \tag{6.8}$$

Полученная прямая пройдёт наиболее близко ко всем нашим экспериментальным точкам. Практическое применение этого метода мы рассмотрим чуть ниже, когда познакомимся с методами линеаризации для поиска коэффициентов в нелинейных зависимостях и расчётом погрешностей для найденных величин.

6.2 Линеаризация нелинейных зависимостей

В ряде случаев искомая нами зависимость может не иметь линейный вид. Но к линейному виду её можно привести, немного преобразовав исходные денные. Таблица 6.2 приводит 10 видов зависимостей и методы их лиреаризации. Для того, чтобы приметить к ним вышеизложенный метод, сначала необходимо преобразовать исходные данные с помощью функций, приведённых в колонках X' и Y'. После этого именно эти, преобразованные данные нужно подставить в метод, который был рассмотрен в предыдущем пункте. Полученные в результате коэффициенты $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ также надо преобразовать с помощью выражений, приведённых в колонках $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{b}'$. И уже полученные нами таким образом, преобразованные коэффициенты будут коэффициентами искомой нами функции.

Таблица 6.2

Линеаризация нелинейных зависимостей

№	Уравнение	X'	Y'	b'	a'
1	$y=\dfrac{1}{a'x+b'}$	x	$\dfrac{1}{y}$	b	a
2	$y=\dfrac{a'}{x}+b'$	$\dfrac{1}{x}$	y	b	a
3	$y=b'\cdot a'^{x}$	x	$\log_{10} y$	10^{b}	10^{a}
4	$y=b\cdot e^{ax}$	x	$\ln y$	e^{b}	a
5	$y=b'\cdot 10^{a'x}$	x	$\log_{10} y$	10^{b}	a
6	$y=b'\cdot x^{a'}$	$\log_{10} x$	$\log_{10} y$	10^{b}	a
7	$y=b'+a'\cdot\log_{10} x$	$\log_{10} x$	y	b	a
8	$y=b'+a'\cdot\ln x$	$\ln x$	y	b	a
9	$y=b'\cdot e^{\frac{a'}{x}}$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln y$	e^{b}	a
10	$y=b'\cdot 10^{\frac{a'}{x}}$	$\dfrac{1}{x}$	$\log_{10} y$	10^{b}	a

6.3 Вычисление погрешностей и доверительные интервалы

В этом разделе давайте поговорим о точности аппроксимации наших данных уравнением регрессии, погрешности, с которой определены коэффициенты и погрешности данных, полученных расчётом по нашей линейной модели. Для решения поставленной задачи нам придётся немного расширить нашу таблицу:

Таблица 6.3

Расчёт погрешности линейной регрессии

№	X_i	$(\Delta X_i)^2$	Y_i	$Y(X) = \mathrm{f}(X_i)$	$(\Delta Y_i)^2$	X_i^2	Y_i^2	$X_i \cdot Y_i$
1	X_1	$\left(X_1 - \langle X \rangle\right)^2$	Y_1	$aX_1 + b$	$\left(Y_1 - \mathrm{f}(X_1)\right)^2$	X_1^2	Y_1^2	X_1Y_1
2	X_2	$\left(X_2 - \langle X \rangle\right)^2$	Y_2	$aX_2 + b$	$\left(Y_1 - \mathrm{f}(X_1)\right)^2$	X_2^2	Y_2^2	X_2Y_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
N	X_N	$\left(X_N - \langle X \rangle\right)^2$	Y_N	$aX_N + b$	$\left(Y_N - \mathrm{f}(X_N)\right)^2$	X_N^2	Y_N^2	X_NY_N
$\sum_{i=1}^{N} \xi_i$	Σ_X	S_X^2	Σ_Y	–	S_Y^2	Σ_{X^2}	Σ_{Y^2}	Σ_{XY}
$\langle \xi \rangle$	$\langle X \rangle$	$D_X = \sigma_X^2$	–	–	$D_Y = \sigma_Y^2$ $\left(S_Y^2 / N - 2\right)$	–	–	–

Самая простая оценка, которую мы можем получить – коэффициент корреляции или коэффициент регрессии R. Он рассчитывается по формуле:

$$R = \frac{\Sigma_{XY} - \dfrac{\Sigma_X \Sigma_Y}{N}}{\sqrt{\left(\Sigma_{X^2} - \dfrac{(\Sigma_X)^2}{N}\right)\left(\Sigma_{Y^2} - \dfrac{(\Sigma_Y)^2}{N}\right)}}. \qquad (6.9)$$

И для го вычисления к исходной таблице… нам достаточно будет добавить всего один столбец: Y^2. Полученная величина характеризует ту степень, с которой наша функция (в данном случае, линейная зависимость) описывает предложенные нами данные. Она изменяется от ***0*** до ***1***. ***«0»*** означает, что никакой корреляции между исходными данными и линейной зависимостью нет, экспериментальные данные не укладываются в предложенную нами модель. ***«1»*** – строгая функциональная зависимость.

Если же нас не устраивает столь скудная оценка результатов, и мы хотим вычислить погрешности определения коэффициентов уравнения регрессии и расчётных данных, нам придётся расшить исходную таблицу до указанных размеров –Таблица 6.3.

И так. Сначала нам необходимо оценить дисперсию экспериментально определённых значений независимой переменной – величины X. Для этого в таблице рассчитаем квадраты отклонения экспериментально определённых значений от средней величины

$$(\Delta \boldsymbol{X}_i)^2 = \left(\boldsymbol{X}_i - \langle \boldsymbol{X} \rangle\right)^2 \tag{6.10}$$

и найдём их сумму:

$$\boldsymbol{S}_X^2 = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{N}} \left(\boldsymbol{X}_i - \langle \boldsymbol{X} \rangle\right)^2 . \tag{6.11}$$

Это, как и прежде, будет средний квадрат отклонения для величины $\boldsymbol{X}$.

Дисперсию величины $\boldsymbol{X}$ оценим по среднему квадрату отклонения, разделив его на число точек $\boldsymbol{N}$ (здесь нужна выборочная, смещённая дисперсия, несмещённую здесь считать нет смысле):

$$D_X = \sigma_X^2 \approx \frac{S_X^2}{N} . \tag{6.12}$$

Обратите внимание – как Вы заметите ниже, чем больше разброс величины $\boldsymbol{X}$, тем лучше! Само по себе странное заявление, как могло бы показаться. Но раньше мы говорили об одной случайной величине, которая не изменялась, но на которую накладывалась случайная ошибка. В этом случае её разброс характеризовал неточность измерений. В данном случае X – это аргумент некоторой функции. И чем больше разброс этой величины, тем на большем интервале, большем участке области определения мы оцениваем её значения для построения уравнения регрессии. Чем больше, тем лучше!

Теперь займёмся значением функции. Рассчитывать ошибку (средний квадрат отклонения) величины $\boldsymbol{Y}$ относительно среднего значения не имеет смысла, ведь она изменяется, рак функция с изменением аргумента. Что же можно в этом случае принять за оценку истинного значения величины? Строя уравнение *регрессии*, мы считали, что это уравнение соответствует истинной модели поведения нашей физической величины. Следовательно, значения, рассчитанные по этому уравнению, будут наиболее точно отражать истинное значение нашей величины. Вот их то мы и примем за истинные значения! Рассчитаем значение уравнения регрессии во всех узлах (для всех значений $\boldsymbol{X_i}$):

$$\boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{X}\right) = \mathrm{f}\left(\boldsymbol{X}_i\right) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{b} .$$

Теперь мы можем вычислить средний квадрат отклонения измеренных значений от наиболее вероятного значения физической величины. В таблице рассчитаем квадрат отклонения каждого измеренного значения величины $\boldsymbol{Y_i}$ от расчётного значения:

$$(\Delta \boldsymbol{Y_i})^2 = \left(\boldsymbol{Y_i} - \mathrm{f}\left(\boldsymbol{X}_i\right)\right)^2 = \left(\boldsymbol{Y_i} - \boldsymbol{a}\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{b}\right)^2 , \tag{6.13}$$

и найдём сумму квадратов отклонений:

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{Y}}^2 = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{N}} \left(\boldsymbol{Y_i} - \mathrm{f}\left(\boldsymbol{X}_i\right)\right)^2 = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{N}} \left(\boldsymbol{Y_i} - \boldsymbol{a}\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{b}\right)^2 . \tag{6.14}$$

Для дисперсии величины $\boldsymbol{Y}$ возьмем её несмещённую оценку по среднеквадратичному отклонению:

$$D_Y = \sigma_Y^2 \approx \frac{S_Y^2}{N-2}. \qquad (6.15)$$

Пора переходить к расчёту погрешности для значений параметров уравнения регрессии (коэффициентов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$). Дисперсию для этих коэффициентов оценим по следующим формулам:

$$\boldsymbol{D_a} = \sigma_{\boldsymbol{a}}^2 \approx \frac{\boldsymbol{D_Y}}{\boldsymbol{S_X^2}}, \qquad (6.16)$$

$$\boldsymbol{D_b} = \sigma_{\boldsymbol{b}}^2 \approx \boldsymbol{D_Y} \frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{X_i^2}}{\boldsymbol{N S_X^2}} = \boldsymbol{D_Y}\left(\frac{1}{\boldsymbol{N}} + \frac{\langle \boldsymbol{X} \rangle^2}{\boldsymbol{S_X^2}}\right). \qquad (6.17)$$

Не будим даже приблизительно разбирать, откуда они появились. Просто поверим, что они верны!

Тогда погрешность определения коэффициентов в уравнении линейной регрессии можно рассчитать по формулам:

$$\Delta \boldsymbol{a} = \sigma_{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{t}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{N}), \qquad (6.18)$$

$$\Delta \boldsymbol{b} = \sigma_{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{t}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{N}), \qquad (6.19)$$

где $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{N})$ – коэффициент Стьюдента, значение распределения Стьюдента для доверительной вероятности $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{N}$ узлов (точек).

Погрешность расчётных значений в экспериментальных точках также можно определить. Она рассчитывается по следующей формуле:

$$\Delta \boldsymbol{Y_k} = \sigma_{\boldsymbol{Y}} \cdot \boldsymbol{t}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{n}) \cdot \sqrt{\frac{1}{\boldsymbol{N}} + \frac{\left(\boldsymbol{X_k} - \langle \boldsymbol{X} \rangle\right)^2}{\boldsymbol{S_X^2}}}. \qquad (6.20)$$

Заметим, что ошибка определения значений величины $\boldsymbol{Y}$ зависит, конечно же, от корня квадратного из дисперсии экспериментально полученных значений этой величины. Но не только! Обратите внимание – чем дальше от «центра тяжести» области нашего эксперимента (от цента того пятна, где лежат экспериментальные точки) мы ведём расчёт, тем больше величина ошибки. Очевидно, что в случае экстраполяции данного уравнения на область, где мы не проводили эксперимент, ошибка в расчётах будет расти.

Ошибку расчёта значений в каждой точке на графике можно отобразить в виде доверительного интервала. Проведя кривые через эти значения (и продлив их за область, где проводился эксперимент), получим коридор доверительной вероятности (Рисунок 3.8 и Рисунок 3.10).

Существуют и более точные методы определения коридора доверительной вероятности. Но эти вопросы уже лежат за рамками рассматриваемого нами материала.

6.4 Примеры применения МНК для решения конкретной задачи

Рассмотрим примеры практического применения приведённых методов.

Первым примером будет определение постоянной Планка из экспериментов по внешнему фотоэффекту. Рассмотрим уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\boldsymbol{E}_{фотона} = \boldsymbol{A}_{Выхода\ e^-} + \left(\frac{\boldsymbol{m}\mathrm{v}^2}{2}\right)_{Max\ e^-}.$$

Напомним, по физическому смыслу – это закон сохранения энергии. Энергия фотона (кванта света) расходуется на работу по отрыву электрона от поверхности. Всё что осталось составляет кинетическую энергию электрона, летящего от катода к аноду. Подставив в это уравнение выражение для энергии кванта, гипотеза Планка – энергия кванта света пропорциональна частоте:

$$\boldsymbol{E}_{фотона} = \boldsymbol{h}\nu,$$

выражение для работы выхода через потенциал поверхности – работа есть произведение заряда электрона ***e*** на разность потенциалов (потенциала вакуума, равного ***0***, и потенциала поверхности $-\varphi_п$):

$$\boldsymbol{A}_{выхода\ e^-} = \boldsymbol{e}\varphi_n,$$

и выражение максимальной кинетической энергии фотоэлектрона через задерживающую разность потенциалов:

$$\left(\frac{\boldsymbol{m}\mathrm{v}^2}{2}\right)_{Max\ e^-} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{U}_з,$$

получаем уравнение

$$\boldsymbol{h}\nu = \boldsymbol{e}\varphi_n + \boldsymbol{e}\boldsymbol{U}_з.$$

Это уравнение легко привести к виду, выражающему зависимость задерживающего напряжения от частоты падающего света:

$$\boldsymbol{U}_з = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{e}}\nu - \varphi_n.$$

Это напряжение в зависимости от частоты достаточно легко определяется экспериментально.

Если провести эксперимент и снять зависимость задерживающего напряжения от частоты:

$$\boldsymbol{U}_з = \boldsymbol{U}_з(\nu) \Rightarrow \{\nu_i, \boldsymbol{U}_{з\,i}\},$$

то аппроксимировав эту зависимость линейной функцией:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{u},$$

можно экспериментально определить постоянную Планка и поверхностный потенциал.

Поскольку в данном случае

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{e}},\ \boldsymbol{b} = -\varphi_n,\ \boldsymbol{X} = \nu,\ \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{U}_з,$$

То

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{a} \ ,$$

$$\varphi = -\boldsymbol{b} \ .$$

Для определения погрешности продифференцируем уравнение:

$$\boldsymbol{dh} = \boldsymbol{e}\,\boldsymbol{da} \ ,$$

$$\boldsymbol{d}\varphi = -\boldsymbol{db} \ ,$$

и перейдём от уравнения полного дифференциала к уравнению погрешности:

$$\Delta\boldsymbol{h} = \boldsymbol{e}\,\Delta\boldsymbol{a} \ ,$$

$$\Delta\varphi = \Delta\boldsymbol{b} \ .$$

Теперь построим уравнение регрессии и определим погрешность коэффициентов. В эксперименте реально измеряется длина волны и задерживающее напряжение. Частоту надо определить, поделив длину волны на скорость света $\boldsymbol{c}$. Ниже приведена таблица экспериментальных данных:

Таблица 6.4

Экспериментальные данные (значение задерживающего напряжения)

№	λ, *нм*	λ, *м*	ν, c^{-1}	U_0, *В*
1	408	4.08E-07	7.35E+14	0.71
2	413	4.13E-07	7.26E+14	0.65
3	429	4.29E-07	6.99E+14	0.54
4	442	4.42E-07	6.78E+14	0.46
5	460	4.60E-07	6.52E+14	0.4
6	477	4.77E-07	6.28E+14	0.32
7	496	4.96E-07	6.04E+14	0.27
8	520	5.20E-07	5.77E+14	0.25
9	555	5.55E-07	5.40E+14	0.22

Заполним таблицу для расчёта коэффициентов уравнения регрессии и их погрешности:

Таблица 6.5

Расчёт линейной регрессии оценка её дисперсии

№	X	Y	X^2	Y^2	$X \cdot Y$	$Y_{РАСЧЁТ}$	$(\Delta X)^2$	$(\Delta Y)^2$	$\Delta Y_{Расчёт}$
1	7.35E+14	0.71	5.40E+29	0.5041	5.22E+14	6.45E-01	7.40E+27	4.27E-03	3.70E-02
2	7.26E+14	0.65	5.27E+29	0.4225	4.72E+14	6.22E-01	5.94E+27	7.91E-04	3.70E-02
3	6.99E+14	0.54	4.88E+29	0.2916	3.77E+14	5.53E-01	2.50E+27	1.57E-04	3.68E-02
4	6.78E+14	0.46	4.60E+29	0.2116	3.12E+14	5.00E-01	8.69E+26	1.59E-03	3.68E-02
5	6.52E+14	0.4	4.25E+29	0.16	2.61E+14	4.32E-01	8.62E+24	1.02E-03	3.67E-02
6	6.28E+14	0.32	3.95E+29	0.1024	2.01E+14	3.72E-01	4.12E+26	2.75E-03	3.67E-02
7	6.04E+14	0.27	3.65E+29	0.0729	1.63E+14	3.11E-01	1.97E+27	1.67E-03	3.68E-02
8	5.77E+14	0.25	3.32E+29	0.0625	1.44E+14	2.39E-01	5.22E+27	1.12E-04	3.70E-02
9	5.40E+14	0.22	2.92E+29	0.0484	1.19E+14	1.46E-01	1.18E+28	5.43E-03	3.72E-02
Σ	5.84E+15	3.82	3.82E+30	1.876	2.57E+15	–	2.87E+28	1.78E-02	–

Среднее значение $\langle X \rangle$:

$$\langle \boldsymbol{X} \rangle = \frac{5.84 \cdot 10^{15}}{9} = 6.49 \cdot 10^{14}.$$

Оценка дисперсии для $\boldsymbol{X}$:

$$D_X = \frac{S_X^2}{N} = \frac{2.87 \cdot 10^{28}}{9} = 3.19 \cdot 10^{27}.$$

Оценка дисперсии для $\boldsymbol{Y}$:

$$D_Y = \frac{S_Y^2}{N-2} = \frac{1.78 \cdot 10^{-2}}{9-2} = 2.37 \cdot 10^{-3}.$$

Значения коэффициентов:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \boldsymbol{X_i} \sum\limits_{i=1}^{N} \boldsymbol{Y_i} - \boldsymbol{N} \sum\limits_{i=1}^{N} \boldsymbol{X_i Y_i}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{N} \boldsymbol{X_i} \right)^2 - \boldsymbol{N} \sum\limits_{i=1}^{N} \boldsymbol{X_i^2}} = \frac{5.84 \cdot 10^{15} \cdot 3.82 - 9 \cdot 2.57 \cdot 10^{15}}{\left(5.84 \cdot 10^{15}\right)^2 - 9 \cdot 3.82 \cdot 10^{30}} = 2.56 \cdot 10^{-15},$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \boldsymbol{Y_i} - \boldsymbol{a} \sum\limits_{i=1}^{N} \boldsymbol{X_i}}{\boldsymbol{N}} = \frac{3.82 - 2.56 \cdot 10^{-15} \cdot 5.84 \cdot 10^{15}}{9} = 1.24.$$

Коэффициент регрессии

$$R = \frac{\Sigma_{XY} - \dfrac{\Sigma_X \Sigma_Y}{N}}{\sqrt{\left(\Sigma_{X^2} - \dfrac{\left(\Sigma_X\right)^2}{N}\right)\left(\Sigma_{Y^2} - \dfrac{\left(\Sigma_Y\right)^2}{N}\right)}} =$$

$$= \frac{2.57\cdot 10^{15} - \dfrac{5.84\cdot 10^{15}\cdot 3.82}{9}}{\sqrt{\left(3.82\cdot 10^{30} - \dfrac{\left(5.84\cdot 10^{15}\right)^2}{9}\right)\left(0.0178 - \dfrac{\left(3.82\right)^2}{9}\right)}} = 0.96\,.$$

Оценка дисперсии коэффициентов

$$D_a = \frac{D_Y}{S_X^2} = \frac{2.37\cdot 10^{-3}}{2.87\cdot 10^{28}} = 8.26\cdot 10^{32},$$

$$D_b = D_Y \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2}{N S_X^2} = \frac{2.37\cdot 10^{-3}\cdot 3.82\cdot 10^{30}}{9\cdot 2.87\cdot 10^{28}} = 3.51\cdot 10^{-2}.$$

Погрешность коэффициентов

$$\Delta a = \sigma_a \cdot t\left(0.95, 9\right) = 8.26\cdot 10^{32}\cdot 2.262 = 6.50\cdot 10^{-16},$$

$$\Delta b = \sigma_b \cdot t\left(0.95, 9\right) = 3.51\cdot 10^{-2}\cdot 2.262 = 0.424,$$

Результаты расчёта физических величин

$$h = ea = 1.60\cdot 10^{-19}\cdot 2.56\cdot 10^{-15} = 4.10\cdot 10^{-34},$$

$$\varphi = -b = 1.24\,.$$

Погрешность результатов

$$\Delta h = e\,\Delta a = 1.60\cdot 10^{-19}\cdot 6.50\cdot 10^{-16} = 1.04\cdot 10^{-34},$$

$$\Delta\varphi = \Delta b = 0.424\,.$$

Окончательные значения расчётных величин:

$$h = \left(4.10 \pm 1.0\right)\cdot 10^{-34}\, Дж\cdot c,$$

$$\varphi = 1.2 \pm 0.4\ B,$$

$$R = 0.96.$$

Так же можно рассчитать погрешности для Y и построить коридор доверительных вероятностей:

$$\Delta Y_k = \sigma_Y \cdot t\left(P, n\right)\cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{\left(X_k - \langle X\rangle\right)^2}{S_X^2}}\,.$$

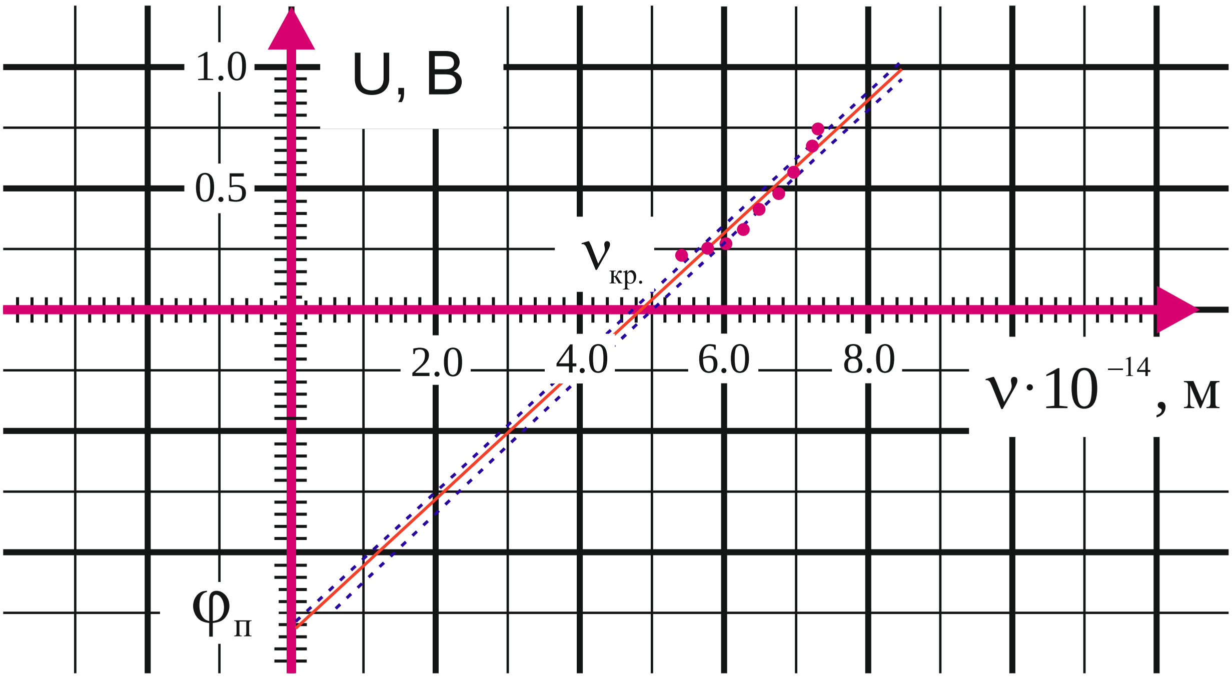


Рисунок 6.1
График регрессионной зависимости

и построить по ней коридор доверительных вероятностей (Рисунок 6.1).

7 Литература

1. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. – Л.: Наука, 1974. – 106 с.
2. Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения прямые многократные. Методика обработки результатов измерений. Основные положения. ГОСТ Р 8.736-2011– М.: Изд-во стандартов, 2013. – 20 с.
3. Рекомендация. Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей. МИ 2083-90 – М.: Изд-во стандартов, 1991. – 10 с.
4. Рекомендация. Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения физических величин. Общие требования. МИ 2091-90 – М.: Изд-во стандартов, 1991. – 18 с.
5. Светозаров В.В. Элементарная обработка результатов измерений. – М.: Изд-во МИФИ, 1983.– 52 с.
6. Светозаров В.В. Основы статистической обработки результатов измерений. – М.: Изд-во МИФИ, 2005.– 40 с.
7. Свешников А.А. Основы теории ошибок. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. – 122 с.
8. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок/ Пер. с англ. - М.: Мир, 1985. – 272 с.