Лабораторная работа № 2.

ОПРРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЁРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

*Теоретическая часть – **момент инерции**.*

1. Момент инерции относительно оси

Df 5.1. ***Момент инерции*** *материальной точки* (относительно оси) равен произведению массы этой точки на квадрат расстояния до оси вращения.

$$I_i = m_i R_i^2$$

Измеряется в *килограммах на метр в квадрате*, $\left[кг \cdot м^2\right] = \left[кг\right]\left[м\right]^2$.

Df 5.2. ***Момент инерции*** *системы материальных точек* (относительно оси вращения) равен сумме моментов инерции всех материальных точек относительно этой оси.

$$I = \sum_{i=1}^{N} I_i = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$$

Замечание 1 (Df.5.3). *Момент инерции твёрдого тела* может быть получен, как сумма моментов инерции всех его материальных точек.

Замечание 2. Момент силы и момент инерции импульса рассматривались нами относительно центра и были векторной величиной. Моменты силы и импульса относительно оси вращения будут проекциями этих векторов на ось вращения, и будет, таким образом, скалярами. Момент инерции рассмотрен нами относительно оси, а не относительно центра. Момент инерции относительно оси, так же, как и момент силы, относительно оси, является скаляром. Однако момент инерции относительно центра будет тензорной величиной, которая представляется в заданной системе координат 3×3 матрицей. О нём, возможно, мы поговорим ниже

Физический смысл.

По физическому смыслу момент инерции тела есть мера инертности тела при вращательном движении.

Момент инерции твёрдого тела.

Рассмотрим алгоритм вычисление момента инерции для твёрдого тела на примере стержня. (*Стержнем называется цилиндр, диаметром которого можно пренебречь*). Задача заключается в сведении процесса вычислений к базовому определению, то есть к определению момента инерции системы материальных точек. Необходимо *«найти у твердого тела все его материальные точки»*, а затем умудрится *«просуммировать все их моменты инерции»*.

Представим стержень как систему материальных точек, для этого разобьем его на элементарные части (на бесконечно малые кусочки). В общем случае (см. рассуждения выше) под элементарной частью мы понимает бесконечно малый объём. В данном случае, за элементарную часть можно принять бесконечно малый отрезок длины стержня (отрезок, длиной dx), т.к. сечение стержня, по определению, бесконечно мало.

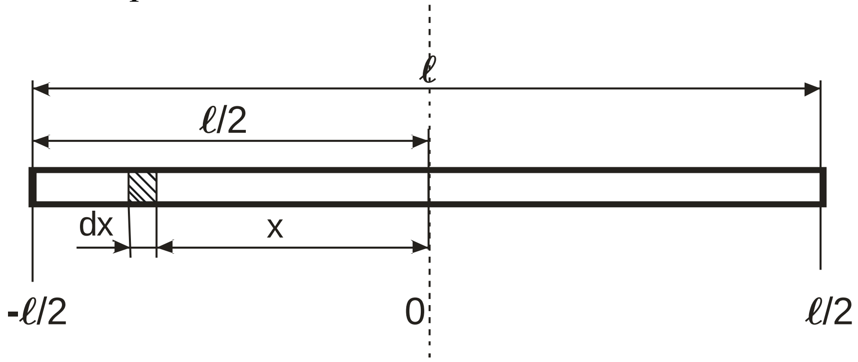

Рисунок 1
Момент инерции стержня

Стержень – цилиндр пренебрежимо малого диаметра. Следовательно, отрезок, длиной $\boldsymbol{dx}$ этого цилиндра можно считать материальной точкой. Масса этой элементарной части (*в выражении через плотность и объём*) будет равна:

$$dm_i = \rho dV_i = \rho \cdot \underbrace{Sdx_i}_{dV_i} = \rho S dx_i \, .$$

Тогда элементарный момент инерции этого элементарного кусочка составит:

$$dI_i = dm_i \underbrace{x_i^2}_{R^2} = x_i^2 dm_i = x_i^2 \underbrace{\rho S dx_i}_{dV} = \rho x_i^2 S dx_i \, .$$

Разобьём наш стержень на *бесконечно большое количество* этих *элементарных кусочков*. Просуммировав их моменты инерции, получим момент инерции тела (стержня):

$$I = \sum_{i=1}^{\infty} I_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \rho S dx_i \, .$$

А теперь заметим, что данная сумма не что иное, как определение интеграла:

$$I = \sum_{i=1}^{\infty} I_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \rho S dx_i = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho S x^2 dx = \rho S \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx =$$

$$= \rho \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \Bigg|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \rho \frac{\pi d^2}{4} \left(\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{l}{2}\right)^3}{3} \right) = \rho \frac{\pi d^2}{4} \cdot \left(\frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{24} \right) =$$

$$= \rho \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{l^3}{12} = \rho \frac{\pi d^2}{4} \cdot l \cdot \frac{l^2}{12} = \rho \cdot V \cdot \frac{l^2}{12} = \frac{ml^2}{12}.$$

Бесконечно большая сумма бесконечно малых частей, коими являются элементарные части (или дифференциал длины $\boldsymbol{dx}$) с математической точностью превращается в интеграл, так как является совершенно честным определением *Римановой суммы*.

2. Теорема Штейнера

Момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$I_{l_1} = I_l + ma^2.$$

Здесь $\boldsymbol{a}$ – расстояние между осями l и l_1. Причём, ось l_1 проходит через центр масс.

Рассмотрим пример применения теоремы Штейнера. Ркассмотрим уже известный нам стержень и вычислим его момент инерции относительно оси, проходящий через его конец (*перпендикулярно самому стержню*):

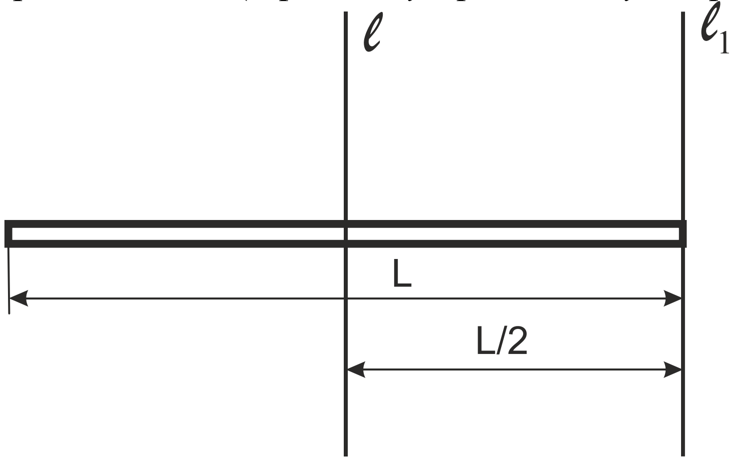

Рисунок 2
Теорема Штейнера для Стержня

Здесь ***a=L/2***, а $I_l = \frac{mL^2}{12}$. Тогда:

$$I_{l1} = I_l + ma^2 = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} =$$

$$= \frac{mL^2}{12} + \frac{3mL^2}{3 \cdot 4} = \frac{mL^2 + 3mL^2}{12} = \frac{4mL^2}{12} = \frac{mL^2}{3}.$$