

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)

В.В. Светозаров  
**О С Н О В Ы**  
**СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ**  
**РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ**

МОСКВА 2005

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

Московский инженерно-физический институт  
(государственный университет)

---

В.В. Светозаров  
ОСНОВЫ  
СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ  
РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Утверждено  
редсоветом института  
в качестве учебного пособия

Москва 2005

УДК 519.281

Светозаров В.В. *Основы статистической обработки результатов измерений*. Учебное пособие. – М.: Изд. МИФИ, 2005, - 40 с.

Пособие является элементарным введением в проблемы анализа результатов эксперимента. Приведены основы современных методов статистической обработки и графического анализа данных. Изложение дополнено примерами и задачами.

Пособие предназначено для ознакомления студентов младших курсов с методами обработки результатов измерений в объёме, достаточном для работы в лабораториях общепрофессионального практикума, однако изложенный в нём материал полезен любому начинающему экспериментатору.

Рецензенты: доцент кафедры общей физики Луковников А.И.

Московский инженерно-физический институт, 2005 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие знакомит студентов с методом обработки результатов измерений, используемыми на втором этапе работы в лабораториях общезначимого практикума МИФИ.

На первом этапе студенты изучают элементарные методы обработки данных. Соответствующие рекомендации приведены в пособии [1], с которым необходимо ознакомиться прежде, чем приступать к чтению настоящего пособия.

На втором этапе студенты знакомятся с основами статистической обработки данных и переходят к вычислению погрешностей современными методами. К этому времени студенты уже знакомы с основами математической статистики (хотя бы в рамках курса молекулярной физики) и легче воспринимают смысл формул теории погрешностей. Кроме того, уже на первом курсе студенты обучены работе с вычислительной техникой, в результате вычислительные процедуры оказываются достаточно компактными и не заслоняют физической сущности проделанных опытов.

В качестве основной меры погрешности на этом этапе используется среднеквадратическая погрешность. Доверительные интервалы вычисляются с помощью распределения Гаусса или Пуассона, а при необходимости – с использованием коэффициентов Стьюдента.

На этом этапе студенты должны усвоить соотношение между числом измерений и погрешностью среднего значения результата, научиться вычислять доверительные интервалы для любой доверительной вероятности при произвольном числе измерений, самостоятельно выбирать оптимальное число измерений, свободно и обоснованно пользоваться нелинейными (в первую очередь – логарифмическими) шкалами при построении графиков, изучить простейшие применения метода наименьших квадратов (вычисление среднего и построение наилучшей прямой).

Материал, изложенный в теоретическом введении (пункт 1) можно при первом чтении пособия опустить, используя для практической работы содержания пунктов 2, и 3 и обращаясь к пункту 1 за разъяснениями, по мере необходимости.

Прежде, чем приступить к численной обработке данных, следует провести хотя бы грубые оценки результатов и погрешностей. Такие оценки полезно делать не только по окончании, но и в ходе работы. При защите работы студент должен отчетливо сознавать основные алгоритмы, по которым проводилась обработка данных.

Начинающему экспериментатору полезно ознакомиться литературой [2–5], в первую очередь – с замечательной книгой Дж. Сквайрса [2]. Подготовленному читателю, желающему получить более глубокие сведения о современных методах обработки результатов и планирования эксперимента, рекомендуем [6–10].

Автор благодарен рецензенту – Луковникову А.И., а также преподавателям кафедры общей физики МИФИ за ряд полезных замечаний и советов.

### 1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В этом разделе мы приведем некоторые результаты математической статистики, на которых основаны современные методы обработки результатов эксперимента. Большинство формул дается без выводов.

### 1.1. Параметры статистических распределений

Величина  $x$ , представляющая собой результат опыта, является, как правило, случайной величиной, т.е. заранее непредсказуема и меняется от опыта к опыту. Случайная величина может быть дискретной, т.е. принимать определенный, конечный или бесконечный набор фиксированных значений, или непрерывной, т.е. принимать произвольные значения. Например, результат бросания игральной кости – дискретная случайная величина, а результат измерения диаметра провода – непрерывная.

Проведя опыт бесконечно большое число раз, мы получим генеральную совокупность – полный набор всех значений, которые может принимать случайная величина. В реальных условиях опыт проводится конечное число раз и мы получаем выборку, состоящую из конечного числа значений случайной величины. Это число называется объемом выборки. Генеральная совокупность – предельный случай выборки с бесконечно большим объемом.

Между параметрами выборки и параметрами генеральной совокупности имеется принципиальное различие. Если взять несколько выборок одного и того же объема  $n$ , т.е. произвести несколько серий опытов или измерений по  $n$  опытов в каждой серии, то, в силу случайного характера измеряемых величин, параметры выборок будут отличаться друг от друга. Другими словами, параметры серий измерений (например, средние значения результатов измерений в серии) являются случайными даже при неизменных условиях опыта. Параметры же генеральной совокупности при заданных условиях опыта неизменны.

Рассмотрим сначала параметры генеральной совокупности, которые математически описываются проще, чем параметры выборки.

Важнейшими параметрами генеральной совокупности являются среднее значение (или математическое ожидание)  $\langle x \rangle$  и среднеквадратичное (стандартное) отклонение  $s_x$ , характеризующее разброс случайных величин. Величину  $s_x$  называют также среднеквадратичной погрешностью или стандартом данного распределения. Часто вместо  $s_x$  более удобно использовать дисперсию

$$D_x = s_x^2,$$

представляющую собой средний квадрат отклонения случайной величины от среднего значения.

Среднее значение, соответствующее бесконечному числу измерений, будем обозначать  $\langle x \rangle$ , чтобы отличить его от  $\bar{x}$ , соответствующего серии из  $n$  измерений. В отсутствие систематических ошибок  $\langle x \rangle$  совпадает с истинным значением измеряемой величины. Параметры, характеризующие разброс измерений, будем снабжать индексом, указывающим случайную величину, к которой эти параметры относятся.

Определение введенных величин:

$$\langle x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ; \quad (1)$$

$$D_x = s_x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2 . \quad (2)$$

Если измеряется несколько величин, среднее значение их суммы равно сумме средних значений, например,

$$\langle x + y \rangle = \langle x \rangle + \langle y \rangle . \quad (3)$$

Докажите это утверждение, используя определение среднего.

Если величины  $x$  и  $y$  независимы, т.е. значение одной из них никак не сказывается на возможных значениях другой, то, как доказывается в теории вероятностей, среднее значение произведения случайных величин равно произведению их средних значений:

$$\langle xy \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle . \quad (4)$$

Используя это соотношение, докажем замечательное свойство дисперсий независимых случайных величин. Пусть  $x$  и  $y$  - такие величины. Обозначим:

$$x_x = x - \langle x \rangle ; \quad x_y = y - \langle y \rangle .$$

Очевидно,

$$\langle x_x^2 \rangle = s_x^2 ; \quad \langle x_y^2 \rangle = s_y^2 .$$

Вычислим дисперсию суммы  $x + y$ :

$$s_{x+y}^2 = \langle (x + y - \langle x + y \rangle)^2 \rangle = \langle (x_x + x_y)^2 \rangle = \langle x_x^2 \rangle + \langle x_y^2 \rangle + 2 \langle x_x x_y \rangle .$$

Поскольку  $x_x$  и  $x_y$  независимы, причём,  $\langle x_x \rangle = \langle x_y \rangle = 0$ , получаем  $\langle x_x x_y \rangle = \langle x_x \rangle \langle x_y \rangle = 0$ .

В результате

$$s_{x+y}^2 = s_x^2 + s_y^2 . \quad (5)$$

Этот закон сложения дисперсий широко используется при обработке результатов эксперимента, когда нужно определить погрешность результата, обусловленную совокупностью различных независимых факторов.

Распределение дискретных случайных величин характеризуют вероятностью их появления. Если было произведено  $n$  опытов (измерений) и из них в  $n_x$  опытах случайная величина  $x$  приняла одно из возможных значений  $x_k$ , то вероятностью появления значения  $x_k$  называется величина

$$P(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_k}{n} . \quad (6)$$

Очевидно,

$$\sum_{k=1}^N n_k = n ,$$

где  $N$  - число возможных значений случайной величины  $x$ .

Отсюда следует условие нормировки:

$$\sum_{k=1}^N P(x_k) = 1 , \quad (7)$$

смысл, которого в том, что вероятность появления хотя бы какого-нибудь значения  $x$  равна единице.

В случае непрерывного распределения вводится вероятность того, что случайная величина заключена в интервале от  $x$  до  $x + dx$ . Эта вероятность

пропорциональна  $dx$  и записывается в виде произведения  $f(x) dx$ . Функция  $f(x)$  называется функцией распределения. С учетом (6), определение этой функции можно записать в виде:

$$f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{dn}{n}, \quad (8)$$

где  $dn$  - число опытов, в которых величина  $x$  оказалась в интервале от  $x$  до  $x + dx$ .

Чтобы сделать понятие функции распределения более наглядным, изобразим результаты серии измерений графически. Значения измерений  $x_i$  будем откладывать на горизонтальной оси  $x$ , которую разобьём на одинаковые интервалы  $\Delta x$ . Число измерений, результаты которых попали в интервал  $\Delta x$ , обозначим  $\Delta n$ . По вертикальной оси будем откладывать долю измерений  $\Delta n/n$ , деленную на величину интервала  $\Delta x$ . В результате получим ступенчатый график (рис.1), называемый гистограммой. График наглядно показывает, где и как группируются результаты измерений.

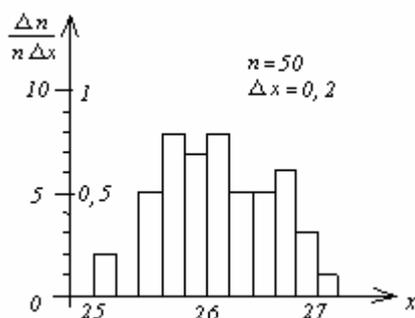


Рис.1. Гистограмма.

Если число измерений велико ( $n \rightarrow \infty$ ), интервалы  $\Delta x$  можно взять весьма малыми. Тогда ступенчатый график превратится в гладкую кривую, называемую кривой распределения, которая и представляет собой график функции распределения  $f(x)$ . Типичный вид кривой распределения приведён на рис.2.

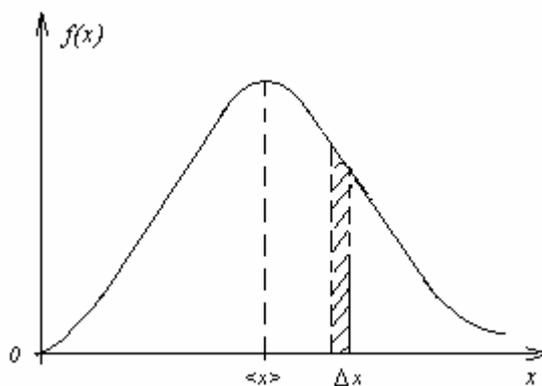


Рис.2. Функция распределения.

Для малых интервалов  $\Delta x$  произведение  $f(x)\Delta x = \frac{\Delta n}{n}$  дает долю полного числа отсчётов, попадающих в малый интервал от  $x$  до  $x + \Delta x$ . Это произведение равно площади заштрихованного участка. Площадь под всей кривой дает долю отсчётов, результаты которых попадают в интервал

$-\infty < x < \infty$ . Эта доля равна, очевидно, единице. Математически это записывается как условие нормировки функции распределения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (9)$$

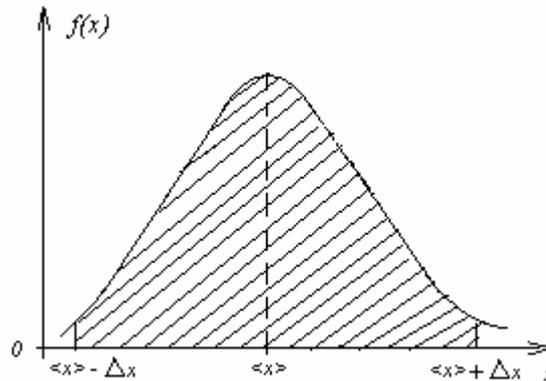


Рис. 3. Доверительный интервал и доверительная вероятность.

Для вычисления доверительных вероятностей обратимся к рис. 3, на котором представлен график функции распределения и доверительный интервал  $\langle x \rangle \pm \Delta x$ . Доля результатов, попадающих в этот интервал, т.е. доверительная вероятность, равна площади заштрихованной фигуры. Эта площадь определяется интегралом

$$a = \int_{\langle x \rangle - \Delta x}^{\langle x \rangle + \Delta x} f(x) dx, \quad (10)$$

для вычисления которого нужен явный вид функции  $f(x)$ .

Если известно распределение вероятностей  $P(x_k)$  дискретной случайной величины или функции распределения  $f(x)$  непрерывной величины, среднее значение произвольной функции  $U(x)$  вычисляется по формуле:

$$\langle U(x) \rangle = \sum_{k=1}^N U(x_k) P(x_k) \quad (11)$$

или

$$\langle U(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) f(x) dx. \quad (12)$$

В частности, среднее значение самой случайной величины и её дисперсия вычисляются согласно выражениям:

$$\langle x \rangle = \sum_{k=1}^N x_k P(x_k), \quad (13)$$

$$s_x^2 = \sum (x_k - \langle x \rangle)^2 P(x_k); \quad (14)$$

или

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (15)$$

$$s_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f(x) dx. \quad (16)$$

## 1.2. Распределение Гаусса и распределение Пуассона

Эти распределения наиболее часто встречаются в практике физического эксперимента.

Распределение Гаусса (или нормальное распределение) является непрерывным. При  $\langle x \rangle = 0$  функция распределения имеет вид

$$f(x) = A e^{-bx^2}, \quad (17)$$

где  $A$  и  $b$  - некоторые константы. Из условия нормировки (9) найдём

$$A = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bx^2} dx \right)^{-1} = \sqrt{\frac{b}{p}}.$$

Вычислим дисперсию

$$s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \sqrt{\frac{b}{p}} e^{-bx^2} dx = \frac{1}{2b}.$$

Отсюда

$$b = \frac{1}{2s^2}; \quad A = \frac{1}{\sqrt{2p} s},$$

и мы получаем

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2p} s} \frac{1}{s} e^{-\frac{x^2}{2s^2}}. \quad (18)$$

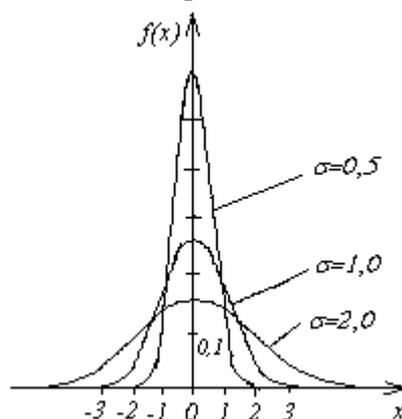


Рис.4. Распределение Гаусса.

На рис.4 приведены графики функции (18) для различных  $s$ . При малых  $s$  графики получаются узкими и высокими, что соответствует тесной группировке результатов измерений вблизи среднего значения. Площади под всеми графиками одинаковы и равны 1.

Если  $\langle x \rangle \neq 0$ , распределение смещается так, что максимум его соответствует  $x = \langle x \rangle$ , а функция распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2p} s} \frac{1}{s} e^{-(x - \langle x \rangle)^2 / (2s^2)}. \quad (19)$$

Для нахождения доверительных вероятностей удобно выразить погрешность  $\Delta x$  в единицах  $s$  :

$$\Delta x = u s . \quad (20)$$

Интеграл (10) после подстановки (19) и (20) выразит  $a$  как функцию  $u$  :

$$a = \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-u}^u e^{-x^2/2} dx ; \quad u = \frac{\Delta x}{s} . \quad (21)$$

Результаты вычисления функции  $\Phi(u)$ , называемой функцией Лапласа, приведены в табл.1.

Таблица 1

Значения функции Лапласа

$u = \frac{\Delta x}{s_x}$	$a = \Phi(u)$	$u$	$\Phi(u)$
0	0		
0,5	0,383	2,5	0,988
1,0	0,683	3,0	0,997
1,5	0,866	3,5	0,9995
2,0	0,954	4,0	0,99994

При  $u = 3 (\Delta x = 3s_x)$  практически все значения измеряемой величины окажутся внутри доверительного интервала ( $a = 0,997$ ), поэтому погрешность  $\Delta x = 3s_x$  часто рассматривают как максимально возможную или предельную (“правило  $3s$ ”).

В математической статистике и в экспериментальной практике распределение Гаусса занимает особое место. Доказывается, что оно наблюдается всякий раз, когда значения случайной величины определяется большим числом независимых случайных параметров. В реальном эксперименте на результаты измерений влияют многие причины, поэтому результаты отдельных измерений непрерывных физических величин имеют обычно нормальное (гауссово) распределение. С другой стороны результатом эксперимента могут быть случайные величины, получаемые путём большого числа отдельных измерений, например, средние значения серий измерений. Такие величины будут распределены по нормальному закону независимо от вида распределения исходных отдельных измерений.

Распределение Пуассона является дискретным распределением, описывающим вероятности случайных взаимно независимых событий. Распределению Пуассона подчиняется, например, число броуновских частиц в поле зрения микроскопа; количество частиц, испускаемых источником постоянной активности в течение определенного интервала времени.

Случайными величинами являются целые числа – количество событий в определенном интервале времени, области пространства и т.п. Вероятность того, что в данном интервале будет зарегистрировано  $N$  событий:

$$P(N) = A \frac{b^N}{N!} ,$$

где  $A$  и  $b$  - некоторые константы. Учитывая

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{b^N}{N!} = e^b$$

и используя условие нормировки (7), найдем

$$A = e^{-b}.$$

Вычислим среднее число событий, регистрируемое в данном интервале:

$$\langle N \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} NP(N) = A \sum_{N=0}^{\infty} \frac{Nb^N}{N!} = Ab \frac{d}{db} \left( \sum_{N=0}^{\infty} \frac{b^N}{N!} \right) = Abe^b = b.$$

Таким образом,

$$P(N) = e^{-\langle N \rangle} \frac{\langle N \rangle^N}{N!}. \quad (22)$$

Дисперсия и среднеквадратичная ошибка равны:

$$s^2 = \sum_{N=0}^{\infty} (N - \langle N \rangle)^2 P(N) = \langle N \rangle; \quad s = \sqrt{\langle N \rangle}. \quad (23)$$

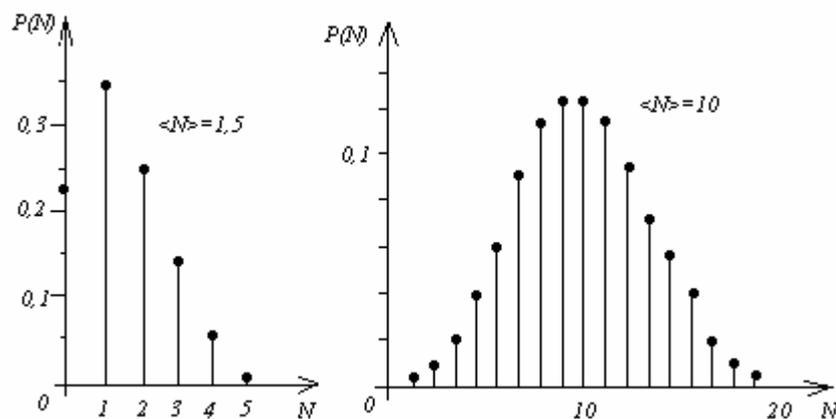


Рис. 5. Распределение Пуассона.

Графики на рис. 5 иллюстрируют распределение Пуассона при различных значениях  $\langle N \rangle$ . При больших  $\langle N \rangle$  дискретное распределение можно приблизительно считать непрерывным (сравните эту ситуацию с переходом от гистограммы к функции распределения), а поскольку каждый из результатов, расположенных вблизи  $\langle N \rangle$ , получается путем большого числа измерений (регистрируется большое число событий  $N$ ), распределение Пуассона при  $\langle N \rangle \gg 1$  превращается в распределение Гаусса, и для него применимы соотношения между доверительным интервалом и доверительной вероятностью, приведенные в табл. 1.

### 1.3. Параметры выборки. Распределение средних значений

В эксперименте мы получаем не генеральные совокупности, параметры которых обсуждались в п. п. 1.1-1.2, а выборки конечного объема  $n$ . При этом возникают следующие вопросы:

1. Как по параметрам выборки оценить параметры генеральной совокупности?
2. Какую величину взять в качестве меры точности результата?
3. Каково соотношение между доверительными интервалами и доверительными вероятностями?

Основные параметры выборки – выборочное среднее  $\bar{x}$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (24)$$

и выборочная дисперсия  $S_x^2$ :

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (25)$$

Очевидно, что:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x} = \langle x \rangle;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_x^2 = s_x^2.$$

Для различных выборок (серий измерений) одного и того же объёма  $n$  мы будем получать различные значения как  $\bar{x}$ , так и  $S_x$ . Усреднив  $\bar{x}$  по большому (в пределе – бесконечному) числу выборок, мы получим  $\langle x \rangle$ . Усредняя  $S_x^2$  найдем соотношение [ 2, 7 ]:

$$\langle S_x^2 \rangle = s_x^2. \quad (26)$$

Для того, чтобы выполнялось соотношение (26), в знаменателе выражения (25) должно стоять не  $n$ , как в выражении (2), а  $(n-1)$ .

Эти результаты подсказывают, что, имея в распоряжении одну выборку, в качестве наилучшего приближения к  $\langle x \rangle$  следует взять  $\bar{x}$ , а наилучшей оценкой  $s_x$  будет  $S_x$ .

Значение  $\bar{x}$  - случайная величина. Взяв  $\bar{x}$  как наилучшую оценку измеряемой величины, мы должны выяснить, как ведет себя отклонение величины  $\bar{x}$  от истинного значения, поскольку именно это отклонение, а не разброс отдельных измерений, определит погрешность окончательного результата эксперимента.

Теория и опыт показывают, что разброс значений  $\bar{x}$  зависит от числа измерений в каждой серии. Чем больше измерений в сериях, тем меньше оказывается разброс средних значений, иными словами, тем точнее среднее значение соответствует истинному.

Разброс средних значений будем характеризовать такими же параметрами, что и разброс отдельных результатов.

Введем среднеквадратичную ошибку среднего  $s_{\bar{x}}$ . Независимо от вида распределения отдельных измерений и числа измерений  $n$  в выборках между величинами, характеризующими разброс отдельных измерений и разброс средних значений, существует простая связь:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}. \quad (27)$$

Это соотношение является фундаментальным в теории погрешностей и поясняется на рис. 6, где приведены: распределение результатов (гистограмма) одной выборки объёмом  $n=10$  и соответствующие этой выборке значения  $\bar{x}$  и  $S_x$ ; распределение результатов отдельных измерений при  $n \rightarrow \infty$  (функция распределения  $f(x)$ ); распределение средних значений большого числа выборок, объёмом  $n=10$  каждая (функция  $f(\bar{x})$ ). Распределение средних значительно уже распределения отдельных измерений.

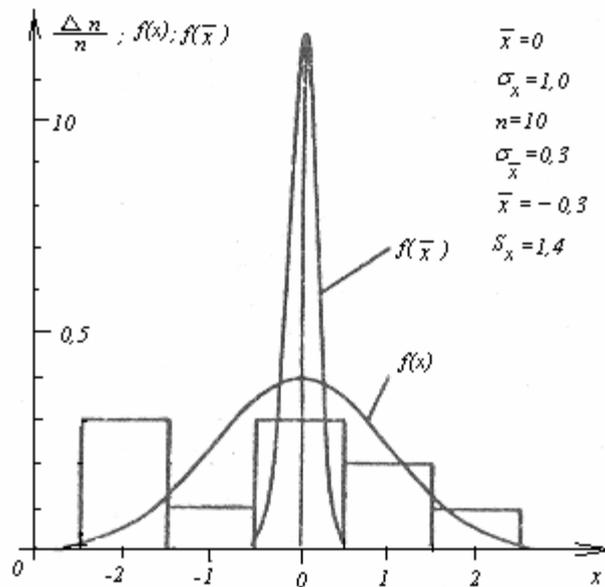


Рис. 6. Распределение результатов отдельных измерений и распределение средних значений.

Вывод (27) можно, используя (5), проделать самостоятельно или найти в [2,7]. Важнее понять смысл этого соотношения: оно показывает, как точность результата серии измерений зависит от числа измерений в серии и указывает пути повышения этой точности.

Пусть требуется уменьшить ошибку результата эксперимента в 10 раз. Эта ошибка определяется величиной  $s_{\bar{x}}$  и для её уменьшения нужно изменить методику эксперимента так, чтобы разброс отдельных измерений уменьшился в 10 раз, либо при сохранении прежней методики увеличить в 100 раз число измерений.

Для определения ошибки  $s_{\bar{x}}$  нужно проделать бесконечно много измерений, что нереально. На практике вычисляют среднеквадратичное отклонение  $S_x$  для серии из  $n$  измерений или величину

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (28)$$

называемую выборочным среднеквадратичным отклонением среднего. При большом числе измерений (практически при  $n > 5$ ) имеем:

$$S_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}}. \quad (29)$$

Распределение средних значений выборок большого объёма будет нормальным (гауссовым) независимо от вида распределения отдельных измерений (см. пример 4).

При гауссовом распределении соотношение между доверительным интервалом и доверительной вероятностью определяется функцией Лапласа  $\Phi(u)$ . Если  $n$  достаточно велико, можно считать  $s_{\bar{x}} \approx S_{\bar{x}}$ , тогда

$$\Delta x = u S_{\bar{x}}, \quad (30)$$

где  $u$  находится по заданному значению доверительной вероятности с помощью функции Лапласа (см. табл. 1).

Различие  $S_x$  и  $s_x$  (соответственно  $S_{\bar{x}}$  и  $s_{\bar{x}}$ ) определяет погрешность в величине доверительного интервала. Эта погрешность связана с разбросом  $S_x$  в

разных сериях измерений. Мерой ошибки в величине ошибки служит среднеквадратичная ошибка  $s_{s_x}$ . Относительное значение ошибки [ 2 ]:

$$d_{s_x} = \frac{s_{s_x}}{s_x} = \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

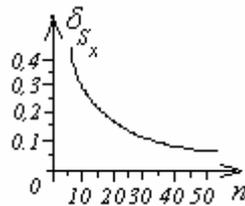


Рис. 7. Погрешность в величине погрешности.

График этой величины приведен на рис. 7. Из графика видно, что нет смысла вычислять погрешности с большой точностью, поэтому при указании погрешностей их значение обычно округляют до одной - двух значащих цифр.

Если число измерений невелико ( $n < 5$ ), величина  $s_{\bar{x}}$  является весьма грубой оценкой  $s_x$ , и для обеспечения заданной доверительной вероятности  $a$  приходится брать более широкие доверительные интервалы, чем определяемые соотношением (30). Поправки особенно заметны при  $a$ , близких к единице.

Погрешность  $\Delta x$  определяется в этом случае по формуле:

$$\Delta x = t_{a,n} s_{\bar{x}}, \quad (31)$$

где  $t_{a,n}$  - коэффициенты Стьюдента, значения которых приведены в табл. 2. При  $n \rightarrow \infty$  эти коэффициенты совпадают с аргументами функции Лапласа (табл. 1 эквивалентна нижней строке табл. 2).

Таблица 2

Коэффициенты Стьюдента  $t_{a,n}$

$a \backslash n$	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	0,33	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	0,29	0,62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	0,28	0,58	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	0,27	0,57	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	0,27	0,56	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	0,27	0,55	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	0,26	0,55	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	0,26	0,54	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	0,26	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
15	0,26	0,54	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
20	0,26	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
25	0,26	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
30	0,26	0,53	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
40	0,26	0,53	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6
60	0,25	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6
120	0,25	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4
$\infty$	0,25	0,52	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6	3,3

#### 1.4. Усреднение неравноточных измерений

Возможны случаи, когда в нашем распоряжении имеется несколько экспериментальных значений  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$  одной и той же измеряемой величины  $x$ , полученных в разное время либо различными экспериментаторами или методами. Известны также среднеквадратичные погрешности  $s_{\bar{x}_k}$  этих результатов. Требуется найти наиболее вероятное значение  $\bar{x}$  измеряемой величины и его погрешность  $s_{\bar{x}}$ .

Если ошибки  $s_{\bar{x}_k}$  заметно различаются, то неразумно в качестве  $\bar{x}$  брать среднее арифметическое имеющихся результатов. Более точно измеренные значения  $\bar{x}_k$  лучше соответствуют истинному и при усреднении должны в большей степени влиять на результат. Поэтому будем вычислять не среднее арифметическое, а среднее взвешенное, считая более точный результат как будто измеренным большее число раз.

Если  $\bar{x}_k$  получено в результате  $n_k$  измерений, причём, все измерения проводились в одинаковых условиях, то общее среднее  $\bar{x}$  можно получить, усреднив всю совокупность измерений:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^m n_k \bar{x}_k}{\sum_{k=1}^m n_k}. \quad (32)$$

Если различие  $s_{\bar{x}_k}$  обусловлено различием чисел  $n_k$ , то в соответствии с (27) имеем:

$$s_{\bar{x}_k} \propto \frac{1}{\sqrt{n_k}}; \quad n_k \propto \frac{1}{s_{\bar{x}_k}^2}. \quad (33)$$

Поскольку числитель и знаменатель дроби (32) можно домножить на произвольное число, важны не сами  $n_k$ , а соотношения между ними. Коэффициенты перед  $\bar{x}_k$ , называемые весами  $w_k$  этих величин и показывающие, сколько раз нужно учесть величины  $\bar{x}_k$  при усреднении, могут оказаться произвольными. Однако соотношение между весами изменяться не может и должно определяться в соответствии с (33). Среднее взвешенное определяется по формуле

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^m w_k \bar{x}_k}{\sum_{k=1}^m w_k}, \quad (34)$$

в которой веса  $w_k$  удовлетворяют условию:

$$w_k \propto \frac{1}{s_{\bar{x}_k}^2} \quad (35)$$

или

$$\frac{w_i}{w_k} = \frac{s_{\bar{x}_k}^2}{s_{\bar{x}_i}^2}. \quad (36)$$

На практике одну из величин  $w_k$  выбирают произвольно, а остальные находят из (35) или (36).

Погрешность  $s_{\bar{x}}$  величины  $\bar{x}$  меньше, чем любой из величин  $x_k$  и находится из соотношения

$$\frac{1}{s_{\bar{x}}^2} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{s_{\bar{x}k}^2}. \quad (37)$$

Пример 1. При бросании игральной кости вероятности выпадания любого из очков от 1 до 6 одинаковы, а сумма вероятностей равна 1, поэтому  $P(x_k)=1/6$ . Среднее значение, дисперсия и среднеквадратичная погрешность количества очков равны:

$$\langle x \rangle = \sum_{k=1}^6 x_k P(x_k) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3,5;$$

$$s_x^2 = \sum_{k=1}^6 (x_k - 3,5)^2 P(x_k) = 2,9;$$

$$s_x = 1,7.$$

Пример 2. Вычислим  $s_x$  для непрерывного равномерного распределения шириной  $d$ , причем,  $x_0 - d/2 \leq x \leq x_0 + d/2$ . Такое распределение имеет место при округлении показаний прибора:  $x_0$  - значение отсчёта по шкале,  $d$  - цена деления или доли деления, до которой производится округление.

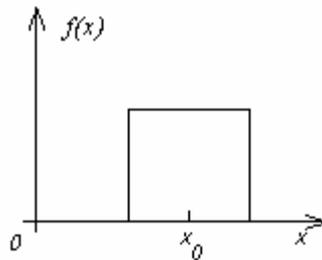


Рис. 8. Равномерное распределение.

При равномерном распределении  $f(x) = const$  (рис. 8). Из условия нормировки находим  $f(x) = 1/d$  при  $x_0 - d/2 \leq x \leq x_0 + d/2$ . Очевидно  $\langle x \rangle = x_0$ , тогда, обозначая  $x = x - \langle x \rangle = x - x_0$ , найдём величины:

$$s_x^2 = \int_{-d/2}^{d/2} x^2 f(x) dx = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} x^2 dx = \frac{d^2}{12};$$

$$s_x = \frac{d}{\sqrt{12}} \approx \frac{d}{3}. \quad (38)$$

Пример 3. Распределение молекул газа по проекции скорости  $v_x$  на ось  $x$  является гауссовым с параметрами:

$$\langle v_x \rangle = 0; \quad s_{v_x} = 200 \text{ м/с}.$$

Масса молекулы  $m = 5,3 \cdot 10^{-26}$  кг. Требуется найти среднюю энергию  $\langle e \rangle$  поступательного движения молекул и долю молекул, проекции скоростей которых на ось  $x$  превышают значение  $v_0 = 500$  м/с.

Средняя энергия равна:

$$\langle e \rangle = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{m}{2} \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle.$$

В силу изотропности распределения молекул по скоростям выполняются соотношения:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle,$$

а поскольку  $\langle v_x \rangle = 0$ , имеем

$$\langle v_x^2 \rangle = s_{v_x}^2.$$

Отсюда следует:

$$\langle e \rangle = \frac{3}{2} m \langle v_x^2 \rangle = \frac{3}{2} m s_{v_x}^2 = 3,2 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

Для определения искомой доли молекул воспользуемся функцией Лапласа. Доля молекул, для которых  $v_0 \leq v_x \leq v_0$ , равна:

$$\Phi\left(\frac{v_0}{s_{v_x}}\right) = \Phi(2,5) = 0,988.$$

Остальные молекулы имеют значения  $|v_x| > v_0$ ; из них половина имеет  $v_x > v_0$  и половина  $v_x < -v_0$ . Следовательно, искомая доля равна:

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \Phi\left(\frac{v_0}{s_{v_x}}\right) \right) = 0,006.$$

**Пример 4.** Продемонстрируем роль распределения Гаусса при вычислениях средних значений. На рис. 9. приведены распределения  $P_n(\bar{x})$  средних значений  $\bar{x}$  выпавших очков при  $n$  бросаниях игральной шестигранной кости. При  $n=1$  имеем равномерное дискретное распределение результатов отдельных бросаний. Средние значения могут меняться дискретно с интервалом  $\Delta\bar{x} = 1/n$ . Точками обозначены значения  $P_n(\bar{x})/\Delta\bar{x} = nP_n(\bar{x})$ , дающие единичную площадь, построенной по этим точкам гистограммы. При больших  $n$  распределение средних становится почти непрерывным. Для сравнения на рис. 10 в, г приведены графики функции распределения Гаусса  $f_0(\bar{x})$  с той же дисперсией, что и соответствующие распределения  $P_n(\bar{x})$ . При  $n=4$  распределение средних значений мало отличается от нормального, а при  $n=8$  эти распределения в пределах графической точности неразличимы.

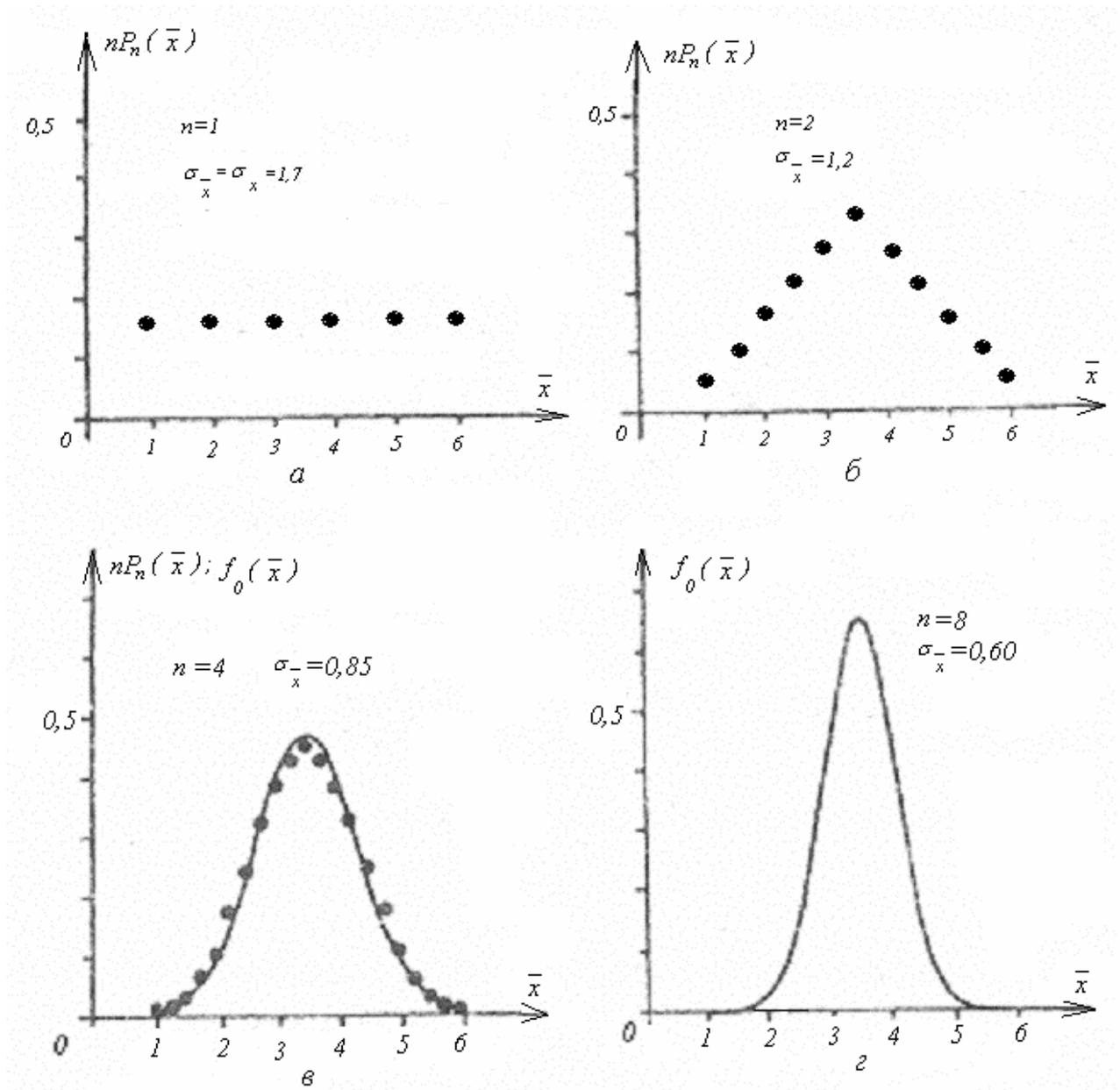


Рис. 9. Распределение средних значений выпавших очков при бросании игральной кости

Пример 5. Какова вероятность того, что счётчик не регистрирует ни одного  $g$ -кванта за 2 секунды при средней скорости счёта 5 квантов в секунду?

Среднее число квантов, регистрируемых в заданном интервале времени,  $\langle N \rangle = 10$ . Искомая вероятность определяется распределением Пуассона  $P(N)$  при  $N = 0$ . Подставляя  $N$  и  $\langle N \rangle$  в (22) и учитывая, что  $0! = 1$ , найдём

$$P(0) = e^{-10} = 4,5 \cdot 10^{-5}.$$

Пример 6. Получите соотношение (37), используя приём, приведший к формуле (35), т.е. считая  $\bar{x}$  результатом совокупной серии из  $n = \sum_k n_k$  измерений.

Пример 7. Покажите, что при определении  $\bar{x}$  и соответствующей погрешности безразлично, проделаем ли мы  $m$  серий по  $n$  измерений в каждой

и затем усредним результаты этих серий, или проделаем одну серию из  $m$  измерений.

## 2. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

### 2.1. Прямые измерения

Исходными данными для расчёта погрешности  $\Delta x$  являются оценки приборной погрешности  $s_{\text{хп}}$ :

$$s_{\text{хп}}^2 = s_{\text{показ}}^2 + s_{\text{отсч}}^2. \quad (39)$$

и среднеквадратичной ошибки  $s_{\bar{x} \text{ разбр}}$ , вызванной разбросом экспериментальных данных:

$$s_{\bar{x} \text{ разбр}}^2 \approx S_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (40)$$

Приборные погрешности определяются в соответствии с рекомендациями, приведёнными в [1]: ошибка показаний – по классу точности или по паспортным данным прибора с использованием “правила  $3s$ ”, ошибка отсчёта – по формуле:

$$s_{\text{отсч}} = \frac{d}{3},$$

где  $d$  - шаг округления (см. пример 2).

Если одна из величин  $S_{\bar{x}}$  или  $s_{\text{хп}}$  превышает другую в три и более раз (соответственно,  $S_{\bar{x}}^2$  и  $s_{\text{хп}}^2$  различаются на порядок и более), для дальнейших расчётов используют большую из них. Если же  $s_{\text{хп}} \approx S_{\bar{x}}$ , находят полную дисперсию и среднеквадратичную ошибку:

$$s_{\bar{x}}^2 = s_{\text{хп}}^2 + S_{\bar{x}}^2;$$

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{s_{\text{хп}}^2 + S_{\bar{x}}^2}. \quad (41)$$

При использовании величины  $\bar{x}$  для дальнейших расчётов косвенно измеряемых величин обработка результатов прямых измерений на этом заканчивается. Если же  $\bar{x}$  есть окончательный результат эксперимента, нужно найти погрешность  $\Delta x$ , соответствующую заданной доверительной вероятности  $a$ .

В научных статьях, как правило, приводят доверительный интервал “плюс – минус одна среднеквадратичная ошибка”:

$$\Delta x = s_{\bar{x}},$$

соответствующий значению  $a = 0,68$ . Такой интервал называют “стандартным” и при указании погрешности часто не приводят значение доверительной вероятности.

В лабораторной практике употребительны значения  $a$ , равные 0,90; 0,95 или 0,99. Способ вычисления погрешности зависит от соотношения между случайной и приборной ошибками и от числа измерений величины  $x$ . Рассмотрим типичные ситуации.

1. В большинстве случаев для вычисления погрешности можно пользоваться распределением Гаусса и находить  $\Delta x$  с помощью функции Лапласа (см. табл. 1) по следующей схеме:

$$a = \Phi(u) \rightarrow u \rightarrow \Delta x = u S_{\bar{x}}.$$

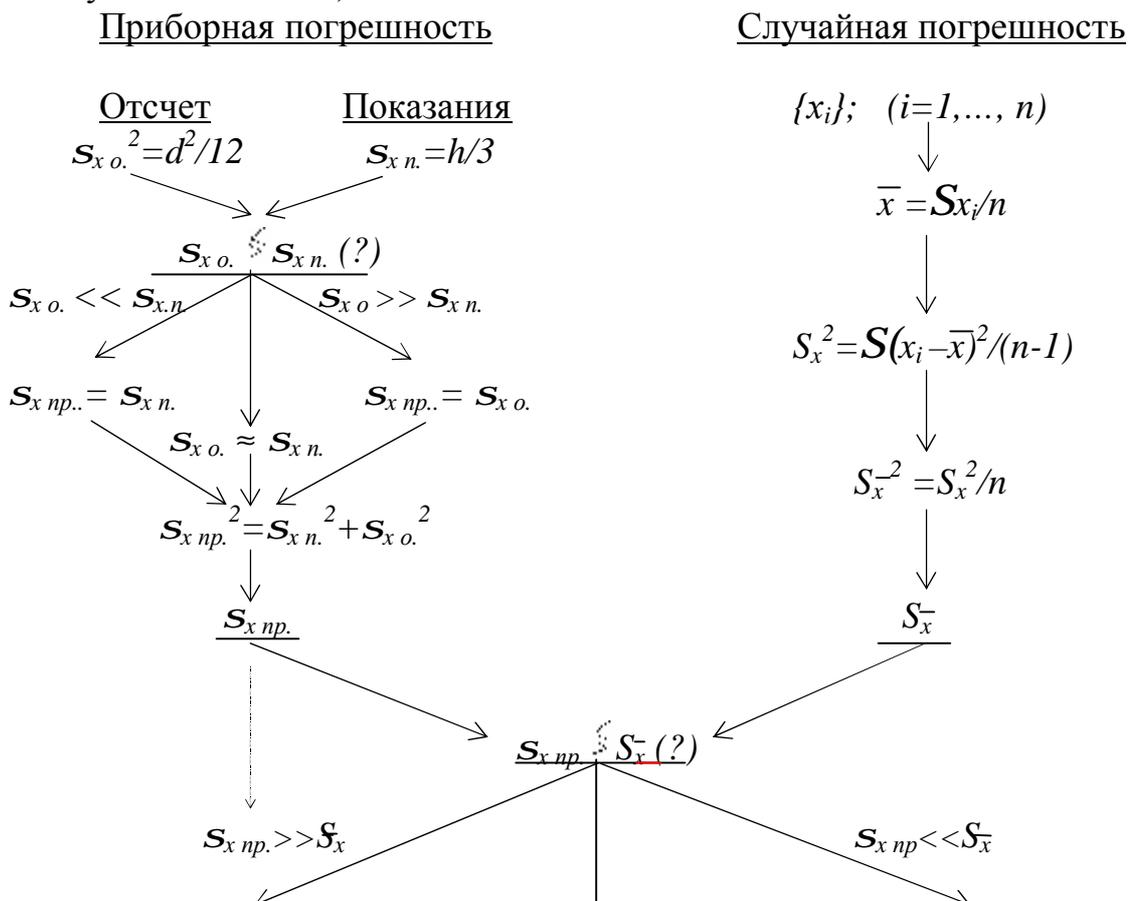
Действительно, условием применимости распределения Гаусса является достаточно большое число факторов, влияющих на ошибку результата. Это условие заведомо выполняется, если преобладают случайные ошибки ( $S_{\bar{x}} \gg S_{\text{ин}}$ ) и число измерений велико ( $n > 5$ ). Если случайные и приборные ошибки одного порядка, то даже при малом числе измерений ( $n \leq 5$ ) количество факторов, влияющих на формирование  $S_{\bar{x}}$ , оказывается достаточно большим (разброс результатов отдельных измерений плюс приборные погрешности). Если преобладают приборные погрешности, часть их не обязательно распределена по нормальному (гауссову) закону. Ошибки округления, например, имеют равномерное распределение. Однако предположение о нормальном распределении совокупной приборной погрешности (39) не приводит к существенным ошибкам при вычислении погрешности.

2. Если преобладают случайные ошибки ( $S_{\bar{x}} \gg S_{\text{ин}}$ ) и число измерений невелико ( $n < 5$ ), погрешность  $\Delta x$  определяют с помощью коэффициентов Стьюдента (табл. 2).

$$\Delta x = t_{\alpha n} S_{\bar{x}}.$$

3. Если приборная погрешность превышает остальные, можно в записи результата не указывать доверительную вероятность, но необходимо указать характер погрешности. Например:  $U = 25,6 \pm 0,8 \text{ В}$  (погрешность – предельная приборная).

Блок-схема расчёта погрешности описанная выше, приведена на рис. 10 (автор – Луковников А.И.)



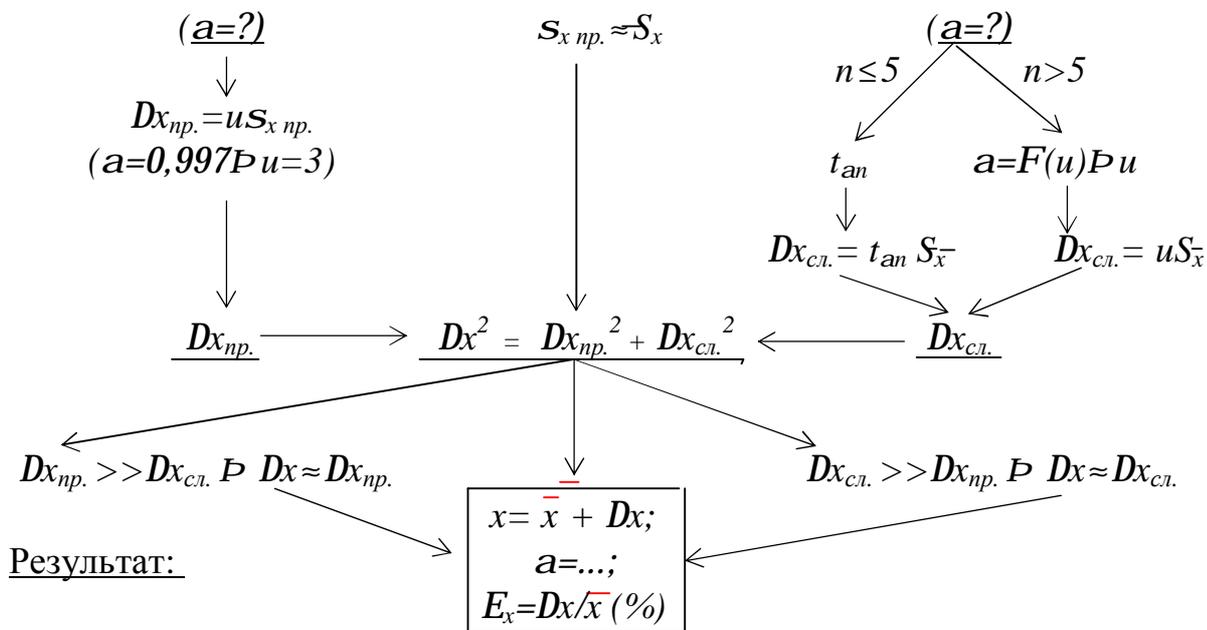


Рис. 10 Схема статистического расчета погрешностей и результатов прямого эксперимента.

Обозначения:  $d$  - цена деления;  $h$  - предельная приборная погрешность,

$S_{x o.}$  - погрешность отсчета показания,  $S_{x np.}$  - приборная погрешность,

$Dx_{сл.}$  - случайная погрешность, остальные обозначения – стандартные.

Рис. 10. Схема статистического расчёта погрешностей и результатов прямого эксперимента.

## 2.2. Счёт случайных событий

Счёт случайных событий производится в самых разных отраслях науки и техники: статистика отказов оборудования, дорожно – транспортных происшествий, значительная часть экспериментов атомной и ядерной физики и т.д..

Как правило, определяют среднее число событий  $\langle N \rangle$  (например, количество частиц, попавших в счётчик в течение определённого интервала времени  $t$ ) или среднюю скорость счёта  $\langle N \rangle / t$ . Если события независимы и средняя скорость счёта - постоянна, фактическое число событий  $N$  в течение интервала  $t$  является случайной величиной, распределенной по закону Пуассона (22) с дисперсией:

$$s^2 = \langle N \rangle.$$

При  $\langle N \rangle \gg 1$  распределение Пуассона близко к распределению Гаусса, и стандартному доверительному интервалу ( $a = 0,68$ ) соответствует погрешность:

$$\Delta N = s = \sqrt{\langle N \rangle} \approx \sqrt{N}.$$

Относительная погрешность при этом равна:

$$\frac{\Delta N}{N} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$$

и убывает с ростом  $N$ , поэтому в эксперименте стараются получить значение  $N$  как можно большее (как говорят, набирают статистику). Часто единственным способом увеличения  $N$  является увеличение длительности эксперимента  $t$ , поэтому нередко эксперименты, длящиеся месяцами, а то и годами (например, при регистрации комического излучения).

В ряде экспериментов ядерной физики помимо интересующих экспериментатора “полезных” числом  $N_0$  событий (например, испускание данным источником частиц данного сорта) счетчик регистрирует и другие, “посторонние” события, называемые фоном (например, частицы другого сорта или другого источника). Число “посторонних” событий обозначим  $N_\Phi$ .

Нередко  $N_\Phi \gg N_0$ , как говорят, фон “забивает” полезный эффект. Можно ли в таких условиях определить  $N_0$ ? Оказывается, можно. Для этого эксперимент проводят дважды: один раз с исследуемым источником считают в течение интервала времени  $t_1$  величину  $N_1 = N_0 + N_\Phi$ , а второй раз – без исследуемого источника, при этом в течение такого же интервала времени  $t_2 = t_1$  считают  $N_2 \approx N_\Phi$ . Затем из результатов первого эксперимента вычитают результат второго:

$$N_0 = N_1 - N_2. \quad (42)$$

Найдём погрешность  $N_0$ , полагая  $N_0 \gg 1$  и  $N_\Phi \gg 1$ . Закон сложения дисперсий (10) даёт результат:

$$s_{N_0}^2 = s_{N_1}^2 + s_{N_2}^2 \approx N_1 + N_2 = N_0 + 2N_\Phi. \quad (43)$$

Относительная погрешность для стандартного доверительного интервала равна:

$$d_{N_0} = \frac{s_{N_0}}{N_0} = \frac{\sqrt{N_1 + N_2}}{N_1 - N_2}; \quad a = 0,68. \quad (44)$$

Если уровень фона невелик ( $N_\Phi \leq N_0$ ), то целесообразно сократить время счёта фона, выбрав  $t_2 < t_1$ .

Пример 8. Сколько времени нужно затратить на определение активности источника при средней скорости счёта  $n_0 = 5$  квантов в секунду, чтобы относительная погрешность не превышала  $d = 10\%$  при доверительной вероятности  $a = 0,95$ ?

Требуемая погрешность невелика и может быть обеспечена лишь при больших  $N$ , поэтому можно пользоваться табл. 1, с помощью которой находим:

$$\Delta N = 2s_N = 2\sqrt{\langle N \rangle};$$

$$d = \frac{\Delta N}{\langle N \rangle} = \frac{2}{\sqrt{\langle N \rangle}};$$

$$\langle N \rangle = \left( \frac{2}{d} \right)^2 = 400;$$

$$t = \frac{\langle N \rangle}{n_0} = 80 \text{ с.}$$

Пример 9. Определим минимальные затраты времени на определение активности того же источника, что в примере 8, но при наличии фоновой активности  $n_\Phi = \frac{\langle N_\Phi \rangle}{t} = 100$  частиц в секунду.

По табл. 1 находим, что  $a = 0,95$  соответствует величина:

$$\Delta N_0 = 2s_{N_0} = 2\sqrt{N_0 + 2N_\Phi}.$$

По условию  $\frac{N_\Phi}{N_0} = \frac{n_\Phi}{n_0} = 2,0$ , поэтому относительная погрешность равна:

$$d_{N_0} = \frac{\Delta N_0}{N_0} = \frac{2\sqrt{N_0 + 2N_\Phi}}{N_0} = \sqrt{\frac{164}{N_0}}.$$

Отсюда число “полезных” частиц, зарегистрированных в первой части эксперимента, равно:

$$N_0 = \frac{164}{d_{N_0}^2} = 1,6 \cdot 10^4$$

и затраты времени определяются величиной:

$$t_1 = \frac{N_0}{n_0} = 3,2 \cdot 10^3 \text{ с.}$$

Столько же времени потребуется на подсчёт  $N_\Phi$ , так что полное время эксперимента равно:

$$t = 2t_1 = 6,4 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 2 \text{ час.}$$

Наличие фона при  $N_\Phi \gg N_0$  приводит к увеличению длительности эксперимента в  $4n_\Phi/n_0 = 80$  раз.

Пример 10. Найдите оптимальное соотношение между  $t_1$  и  $t_2$  при  $n_\Phi \leq n_0$ , обеспечивающее минимальные затраты времени на эксперимент при заданной погрешности.

### 2.3 Косвенные измерения

Пусть интересующая нас величина  $z$  является известной функцией величин  $a, b, c, \dots$ , измеряемых непосредственно:

$$z = z(a, b, \dots).$$

По результатам прямых измерений находятся средние значения  $\bar{a}, \bar{b}, \dots$  и погрешности  $s_{\bar{a}}, s_{\bar{b}}, \dots$ . В качестве наилучшего приближения для  $z$  возьмём:

$$\bar{z} = z(\bar{a}, \bar{b}, \dots).$$

Для определения  $s_{\bar{z}}$  учтём, что при отклонении результатов измерений первичных величин от их истинных значений на малые приращения  $da, db, \dots$  величина  $z$  получит приращение

$$dz = \frac{\partial z}{\partial a} da + \frac{\partial z}{\partial b} db + \dots \quad (45)$$

Если погрешности измерения различных первичных величин независимы, в правой части (45) имеем сумму случайных независимых величин. Используя закон сложения дисперсий (5), найдём

$$s_{\bar{z}} = \sqrt{s_{\bar{z}a}^2 + s_{\bar{z}b}^2 + \dots}, \quad (46)$$

где

$$\left. \begin{aligned} s_{\bar{z}a} &= \left| \frac{\partial z}{\partial a} \right| s_{\bar{a}}, \\ s_{\bar{z}b} &= \left| \frac{\partial z}{\partial b} \right| s_{\bar{b}}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\}. \quad (47)$$

Значения производных находим, как и значение  $z$ , подставляя вместо истинных значений величин их средние экспериментальные значения.

Для выделения максимального вклада в результирующую погрешность следует вначале найти численные значения  $s_{\bar{z}a}, s_{\bar{z}b}, \dots$ , сравнить их и лишь затем, если потребуется, воспользоваться формулой (46).

Если после вычисления  $s_{\bar{z}a}, s_{\bar{z}b}, \dots$  окажется, что лишь одна (наибольшая) из этих величин определяет ошибку  $s_{\bar{z}}$ , например  $s_{\bar{z}} \approx s_{\bar{z}a}$ , то погрешность  $\Delta z$  определяется через  $s_{\bar{z}}$  и доверительную вероятность так же, как и в случае прямых измерений, т.е. с помощью функции Лапласа или коэффициентов Стьюдента – в зависимости от числа параметров, сформировавших ошибку соответствующей первичной величины (см. п. 2.1). При этом погрешности  $\Delta z$  и  $\Delta a$ , соответствующие заданной доверительной вероятности, связаны соотношением:

$$\Delta z = \left| \frac{\partial z}{\partial a} \right| \Delta a.$$

Если же две или более из величин  $s_{\bar{z}a}, s_{\bar{z}b}, \dots$  дают сравнимые вклады в  $s_{\bar{z}}$ , то общее число измерений величин  $a, b, \dots$ , определяющих  $s_{\bar{z}}$ , оказывается достаточно большим, и поправки, даваемые коэффициентами Стьюдента, несущественны. Соотношение между  $\Delta z$  и полученной оценкой  $s_{\bar{z}}$  определяется нормальным распределением и находится с помощью функции Лапласа (см. табл. 1).

Получив окончательный результат эксперимента, проведите анализ погрешностей. Нужно указать ответы на следующие вопросы.

Какое измерение дает наибольший вклад в погрешность результата?

Какие погрешности (случайные или приборные) преобладают в эксперименте?

Согласуется ли результат опыта с теорией или с табличными данными? Если нет, то каковы причины расхождения? Расхождение будем считать незначительным, если доверительные интервалы сравнимых величин перекрываются.

Попробуйте также указать возможные источники систематических ошибок и пути повышения точности эксперимента.

### 3. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Между совместно измеряемыми величинами (например,  $x_i$  и  $y_i$ , где  $i$  – номер измерения) часто существует функциональная зависимость (сила тока зависит от напряжения, время падения зависит от высоты и т.д.). Пусть вид этой зависимости известен с точностью до значений некоторых параметров  $a_1, \dots, a_m$ :

$$y = f(x, a_1, \dots, a_m),$$

и нужно подобрать значения параметров так, чтобы расхождение расчётной кривой с результатами эксперимента было минимальным.

Критерием получения “наилучшей” комбинации параметров служит минимальность суммы квадратов отклонений или среднеквадратичного отклонения экспериментальных точек от расчётной кривой. Подбор параметров по такому принципу называется методом наименьших квадратов (МНК).

МНК не даёт вида зависимости  $y(x)$ . Вид зависимости выбирается либо из теоретических предположений, либо как наиболее соответствующий экспериментальным данным.

МНК является мощным, но слепым орудием, позволяющим найти наилучшие параметры любой зависимости, которая приписывается какому угодно набору данных. Можно, например, провести одну “наилучшую” прямую для всей совокупности точек, или построить по МНК “наилучшую” синусоиду или, наконец, соединить экспериментальные точки ломаной линией, которая заведомо удовлетворит критерию МНК, но такие построения никому не нужны, поскольку неверно интерпретируют результаты опыта.

Поэтому перед применением МНК необходимо убедиться, что результаты опыта действительно соответствуют предполагаемой зависимости. Прежде всего нужно представить результаты графически. Часто предполагаемая зависимость выполняется в ограниченной области изменения переменных. Эту область легко выделить на графике и тем самым избежать грубой ошибки.

При интерпретации опытных данных значения  $x_i$  будем считать точными. Погрешности в определении  $x_i$  приводят к дополнительному разбросу  $y_i$  и тем самым учитываются в отклонениях  $y_i$  от расчётной кривой.

Критерий МНК требует минимальности суммы

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a_1, \dots, a_m)]^2.$$

Условия минимума

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0 \quad \text{при } j = 1, \dots, m$$

содержат  $m$  уравнений, т.е. столько, сколько неизвестных параметров  $a_j$ .

Применим МНК к линейной зависимости:

$$y = kx + b. \tag{48}$$

Сумма

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - kx_i - b)^2$$

минимальна при условиях:

$$\frac{\partial S}{\partial k} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - kx_i - b) = 0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - kx_i - b) = 0.$$

Отсюда приходим к уравнениям:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = k \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i;$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = k \sum_{i=1}^n x_i + nb.$$

Разделив обе части уравнений на  $n$ , получим:

$$\langle xy \rangle = k \langle x^2 \rangle + b \langle x \rangle; \quad (49)$$

$$\langle y \rangle = k \langle x \rangle + b. \quad (50)$$

Из последнего уравнения следует, что наилучшая прямая проходит через центр тяжести экспериментальных точек, т.е., через точку с координатами  $\langle x \rangle, \langle y \rangle$ .

Решение уравнений (49) и (50) запишем в виде:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}; \quad (51)$$

$$b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle. \quad (52)$$

Выражения для ошибок приведём без вывода:

$$s_{\langle y \rangle} = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)} \sum_{i=1}^n (y_i - kx_i - b)^2}; \quad (53)$$

$$s_k = s_{\langle y \rangle} \sqrt{\frac{1}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}}; \quad (54)$$

$$s_b = s_{\langle y \rangle} \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}}. \quad (55)$$

Если экспериментальные точки группируются вдали от начала координат, то вычисления должны проводиться с большой точностью, без округлений, поскольку в (51) – (55) появятся малые разности больших величин, и ошибки округления могут быть сравнимы с этими разностями. Удобен для расчётов портативный калькулятор с ячейкой памяти, в которой накапливаются члены сумм при вычислении средних значений. При небольшом навыке вычисление  $k, b$  и их погрешностей для 6-10 экспериментальных точек занимает 20-30 минут. Если точные вычисления проводить не на чем, нужно перенести начало координат в точку  $\langle x \rangle$  и вычислить новые значения  $x'_i = x_i - \langle x \rangle$ . В новой системе координат будет  $\langle x' \rangle = 0$  и выражения (51), (53), (54), (55) существенно упростятся, а для расчётов хватит точности логарифмической линейки.

Сказанное выше относилось к равноточным измерениям. Если же погрешности отдельных измерений величины  $y$  существенно различаются, критерий МНК требует минимальности взвешенного среднеквадратичного отклонения экспериментальных точек от расчетной кривой. При построении наилучшей прямой остаются справедливыми выражения (51) и (52) для  $k$  и  $b$ , но входящие в них средние значения должны быть взвешенными средними (п. 1.4).

Пример 11. Теоретическая зависимость силы тока  $I$  через полупроводниковый диод от приложенного к нему напряжения  $U$  имеет вид:

$$I = I_0 (e^{U/U_0} - 1),$$

где  $I_0$  и  $U_0$  - константы, причём,  $U_0$  составляет несколько десятков милливольт. Требуется проверить теоретическую зависимость и найти эти константы. Была снята вольтамперная характеристика диода Д 223 (табл. 3), причём, ток и напряжение измерялись с погрешностью менее 1%.

Таблица 3

Вольтамперная характеристика диода Д 223

№ измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U, мВ$	413	450	468	495	527	552	581	620	651	683
$I, мкА$	20,0	50,0	100	200	500	$100 \cdot 10$	$200 \cdot 10$	$500 \cdot 10$	$100 \cdot 10^2$	$200 \cdot 10^2$

По данным таблицы  $U \gg U_0$ , поэтому

$$I \approx I_0 e^{U/U_0},$$

и график в полулогарифмическом масштабе должен быть линейным:

$$\ln I = \ln I_0 + \frac{1}{U_0} \cdot U. \quad (56)$$

При вычислении логарифмов значения  $I$  берём всё время в одних и тех же единицах ( $I_{e0} = 1 мкА$ ). Построив точки на графике (рис. 11), видим, что только первые 6 точек хорошо ложатся на прямую, т. е. зависимость (56) выполняется при  $I \leq 1 мА$ , и параметры её надо искать по точкам 1 - 6. Обозначим в соответствии с (48) и (56):

$$x = U; \quad y = \ln I; \quad b = \ln I_0; \quad k = \frac{1}{U_0}.$$

Пересчитывая данные табл. 3 для первых шести точек, получаем набор данных, приведённый в табл. 4.

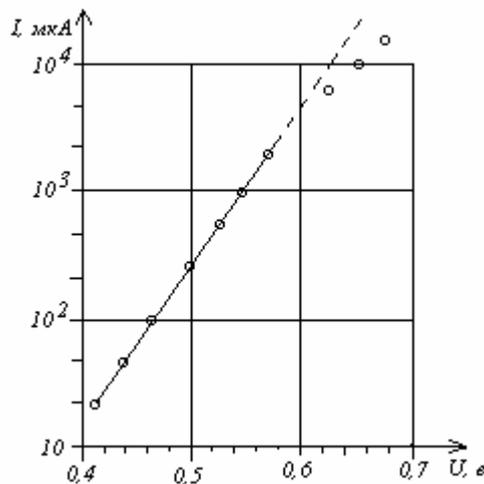


Рис. 11 Вольтамперная характеристика диода.

Таблица 4

№						

измерения	1	2	3	4	5	6
$x$	413	450	468	495	527	552
$y$	2,996	3,912	4,605	5,298	6,215	6,908

Обработав эти данные, получим:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= 484,2; & \langle y \rangle &= 4,989; & \langle x^2 \rangle &= 2,366 \cdot 10^5; \\ \langle xy \rangle &= 2478; & k &= 2,86 \cdot 10^{-2}; & b &= -8,84; \\ s_{\langle y \rangle} &= 2,8 \cdot 10^{-2}; & s_k &= 6,0 \cdot 10^{-4}; & s_b &= 0,30. \end{aligned}$$

Количество знаков в первых четырёх результатах оставлено “с запасом”, чтобы избежать ошибок округления. Проведя расчёты, получим:

$$U_0 = \frac{1}{k} = 35,0 \text{ мВ}; \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = \frac{s_k}{k} = 2 \cdot 10^{-2};$$

$$I_0 = e^b = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ мкА}; \quad \Delta I_0 / I_0 = s_b = 0,3.$$

Окончательно получаем:

$$U_0 = 35,0 \pm 0,7 \text{ мВ}; \quad I_0 = (1,4 \pm 0,4) \cdot 10^{-4} \text{ мкА}.$$

При работе с показательными и другими быстро меняющимися функциями нужно особо тщательно следить за точностью измерений, поскольку даже небольшие погрешности прямых измерений могут привести к большим ошибкам в определении параметров этих функций. В нашем примере среднеквадратичное отклонение экспериментальных точек от “наилучшей” прямой составляет 2,5 мВ по оси напряжений, т. е. около 0,5% измеренных значений напряжений и около 7% по оси токов. Погрешность определения углового коэффициента прямой и соответственно напряжения  $U_0$  составила 2%, а тока  $I_0$  - 30%. Большая погрешность  $I_0$  обусловлена также экстраполяцией на большое расстояние.

Пример 12. Согласно (52) погрешность величины  $b$  определяется погрешностью  $\langle y \rangle$  и погрешностью углового коэффициента  $k$ . Используя соотношения (54) – (55) докажите результат:

$$s_b = \sqrt{s_{\langle y \rangle}^2 + (\langle x \rangle s_k)^2}.$$

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Светозаров В.В. Элементарная обработка результатов измерений. – М.: Изд. МИФИ, 2005 г.
2. Сквайрс Дж. Практическая физика. – М.: Мир, 1971 г.
3. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. – Л.: Наука, 1974 г.
4. Кассандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. – М.: Наука, 1970 г.
5. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента. – М.: Мир, 1972 г.
6. Худсон Д. Статистика для физиков. – М.: Мир, 1970 г.

7. Смирнов Н.В., Дунин – Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука, 1969 г.
8. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1969 г.
9. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. – М.: Физматгиз, 1968 г.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров, гл. 19, 20. – М.: Наука, 1970 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

### ПРЕДИСЛОВИЕ

#### 1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

- 1.1. Параметры статистических распределений
- 1.2. Распределение Гаусса и распределение Пуассона
- 1.3. Параметры выборки. Распределение средних значений
- 1.4. Усреднение неравноточных измерений

#### 2. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

- 2.1 Прямые измерения
- 2.2 Счёт случайных событий
- 2.3 Косвенные измерения

#### 3. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

#### СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ